இயக்கவியல்

மகாதேவன் (ஆர்)

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவன (க.வெ.) வரிசை எண்—265

இயக்கவியல்

(DYNAMICS)

(பட்டப்படிப்புக்குரிய சிறப்புப்பாடம்)

ஆசிரியர்கள்

திரு. ஆர். மகாதேவன், எம்.ஏ., எல்.டி.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

திரு. க. சிவசுப்பிரமணியம், எம்.ஏ.,
கணித இணைப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

திரு. ப. இரா. சுப்பிரமணியம், எம்.எஸ்ஸி.,
கணித உதவிப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—June, 1971

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 265

DYNAMICS (Major)

R. MAHADEVAN,
K. SIVASUBRAMANIAM,
B. R. SUBRAMANIAM.

***Net Price Rs.* 7·00**
(NO DISCOUNT)

Printed by
Kabeer Printing Works,
Madras-5

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி—உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினேர் ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் நூல்களை வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'இயக்கவியல்' என்ற இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 265ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 300 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

இயக்கவியல்

1. முன்னுரை

1. **இயக்கவியலின் வரையறை** (Dynamics : Definition): இயந்திரவியலின் நோக்கமே பொருள்களின் இயக்கங்களை (Motions) ஆராய்ந்து அவற்றைப்பற்றிய உண்மைகளைச் சுலபமான முறையில் விளக்குவதேயாகும். மேலும், கண்டறிந்தவற்றிலிருந்து பொதுப்படையான கருத்துகளை உருவாக்கி மற்றப் பொருள்களின் இயக்கங்களைப் பற்றி முன்கூட்டியே கூற முயலுவதும் இதன் நோக்கமாகும்.

இயற்கையில் நிகழும் இயக்கங்கள் யாவும் பொருள்களுக்கிடையே நிகழும் வினை, அதனால் உண்டாகும் எதிர்வினை முதலியவற்றால் ஏற்படுவதாகும். இயக்கங்களின் காரணங்களை ஆராயாது, பொருள்களின் இயக்கங்களைமட்டும் விவரித்துக் கூறும் இயந்திரவியலின் பகுதியை இயங்கியல் (Kinematics) என்றும், பொருள்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பும் அதனால் நிகழும் இயக்கங்களையும் பற்றி ஆராயும் பகுதியை இயக்கியம் (Kinetics) என்றும் கூறலாம். இந்த இரு பகுதிகளையும் சேர்த்து இயக்கவியல் (Dynamics) என்று சொல்லுவது மரபு.

2. **இயக்கவியலைப்பற்றிப் படிப்பதன் நோக்கம்:** இயக்கவியலைப்பற்றிப் படிப்பதன் காரணங்கள் குறைந்தது மூன்று உண்டு. (1) இயந்திர உலகில் நாம் ஓரளவுக்கு இதன் அடிப்படைத் தத்துவங்களைப்பற்றித் தெரிந்திருக்க வேண்டியது இன்றியமையாதது. (2) பௌதிகவியல் (Physics), வானியல் (Astronomy) இவைகளைப் பற்றி அவசியம் தெரிந்திருக்க வேண்டிய நாம் அவைகளின் அடிப்படைக் கொள்கைகளைக்கொண்ட இயக்கவியலைப்பற்றி அறிந்து கொள்வது முக்கியமாகும். இயக்கவியலில் கடைப்பிடிக்கும் தர்க்கரீதிகளும் செயலாற்றும் முறைகளும் எப்போதும் கணித வல்லுநர்களுக்கு அதனிடம் ஒரு ஈடுபாட்டை உண்டாக்கியிருக்கிறது.

3. **உருவாக்கப்பட்டிருக்கும் முறை:** இயக்கவியல் ஆராய்ச்சியாளர்கள் வடிவு கணித முறை (Geometrical method), பௌதிக

முறை (Physical method) என்ற இரு முறைகளையுமே கையாண்டிருக்கிறார்கள்.

முதலில் இயற்கையாக அமைந்த அல்லது மனிதன் உருவாக்கிய பொருள்களின் செயல்முறைகளையும் அதன் விதிகளையும் ஆராய்கிறார்கள். அதன்மூலம் கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப்பட்டுச் செயலாற்றக்கூடிய பொருள்களின் இயக்கங்களைப்பற்றி முன்கூட்டியே கூற முயலுகிறார்கள். இதை பௌதிக முறை எனலாம். செய்வதறியாமலேயே பௌதிக ஆராய்ச்சியாளர்கள், வானியல் ஆராய்ச்சியாளர்கள், பொறியியல் வல்லுநர்கள் முதலானோர் பௌதிக முறையிலிருந்து வடிவு கணித முறைக்கு மாறுகிறார்கள். உதாரணமாக வானியல் ஆராய்ச்சியாளர்கள் பூமியை ஒரு வடிவு கணிதக் கோளமாகவோ அல்லது நீள்வளையக் கோளமாகவோ கருதுகிறார்கள். உண்மையில் பூமியின் உருவம் அவ்வளவு எளிதான வடிவங்களால் குறிக்க இயலாது. அதேபோல் பொறியியல் வல்லுநர்கள் ஒரு சக்கரத்தை வடிவு கணித வட்டமாகக்கொண்டு ஆராய்கிறார்கள். இயற்கையில் நிகழும் இயக்கங்கள் யாவும் பலதரப்பட்ட பொருள்களின் சேர்க்கையினாலும், எதிர்வினைகளினாலும் தாக்கப்படுகின்றன. அந்த இயக்கங்களைப்பற்றி ஆராயும்போது அவசியமில்லாதவற்றை நீக்கி மற்றவைகளைக்கொண்டு முடிவுகளை உருவாக்குவது சிறந்த முறை. இயற்கையில் உண்மையான விறைப்புப் பொருளோ (Rigid body), நீட்ட இயலாத நூலோ (Inelastic string) கிடையாது. இருந்தும் அப்படிப்பட்ட சாதனங்களைக்கொண்டு இயக்கங்களை முதலில் ஆராய்ந்து பின் பொருளில் ஏற்படும் மாறுதல், நூலில் ஏற்படும் நீட்டம் இவைகளால் இயக்கம் எப்படிப் பாதுகாக்கப்படுகிறது என்று காண்பதுதான் இங்குள்ள முறையாகும்.

4. **இயக்கவியலின் தத்துவம்:** பரவலான செய்முறைகளைக் கொண்டு இயக்கவியலின் தத்துவங்கள் உருவாக்கப்பட்டிருக்கின்றன. குறிப்பாக, கலிலியோ (Galileo), நியூட்டன் (Newton), கெப்லர் (Kepler) போன்ற விஞ்ஞானிகளின் சிறப்புக்குரிய சோதனைகளின் முடிவுகளே இயக்கவியலின் அடிப்படைத் தத்துவங்கள் என்று கூறினால் மிகையாகாது. ஒளியின் வேகத்துடன் ஒப்பிடும்போது மிகக் குறைவாக உள்ள வேகத்துடன் இயங்கும் பொருள்களுக்கு நியூட்டனின் விதிகள் பொருந்துகின்றன. அந்த விதிகளைக் கணித ரீதியாக நிரூபிக்க இயலாது. ஆனால், செய்முறையின்போது கிடைக்கும் முடிவுகள் அந்த விதிகளைச் சார்ந்திருப்பதால் அவைகளைக் கடைப்பிடித்து மற்றப் பொருள்களின் இயக்கங்களைப்பற்றி முன்கூட்டியே கூற முயலுகிறோம்.

5. **இயக்கவியலுக்கு ஆதாரமானவை:** 1. துகள் (Particle), 2. திணிவு (Mass), 3. விசை (Force), 4. விறைப்புப் பொருள், 5. குறியீட்டச்சு முதலியன இயக்கவியலுக்கு ஆதாரமானவைகள்.

(1) **துகள் :** இதைப் பரிமாணமேயில்லாத ஒரு பொருளாகக் கருதுவது வடிவு கணித முறையாகும். இதில் புள்ளியை எப்படி வரையறுக்கிறோமோ அதேபோல் இயக்கவியலில் துகளைக் கருதுகிறோம். பரிமாணமேயில்லாத துகளுக்கு ஒரு நிச்சயமான நிலை உண்டு என்பது அடிப்படைத் தத்துவமாகும்.

(2) **திணிவு :** அளவிலும் உருவத்திலும் ஒரே மாதிரியாகவுள்ள தங்கக் கட்டிகள் இரண்டு செய்முறைகளின்போது ஒரே முடிவுகளைக் கொடுக்கும் என்பது தெளிவு. ஆனால் அளவு, உருவம் இவைகளில் மாறுபட்ட வெவ்வேறு பொருள்கள், இயக்கவியல் செய்முறைகளின் போது ஒரே முடிவைக் கொடுப்பது விந்தையென்றாலும் உண்மை என்பது கண்கூடாகக் காணும் நிகழ்ச்சி. இப்படிப்பட்ட பொருள்களை இயக்க சமம் என்று கூறினால் அந்த இயக்க சமத்திற்கு அடிப்படையான பொருள்களிடையேயுள்ள சமத்துவத்தைத் திணிவு என்கிறோம்.

(3) **விசை :** ஒரு பொருளின் இயக்கத்தை மாற்றக்கூடிய செயலை ஈர்ப்புவிசை என்கிறோம். அதேபோல் பொருளின் இயக்கத்தைப் பூமி யின் சக்தியினால் மாற்ற முடியுமென்பது தெளிவு. அப்போது பொருளின் மீது இயங்கு விசையைப் பொருளின் **நிறை** என்கிறோம். எனவே, பொருளின் நிறை பூமியில் அதன் இடத்தைப் பொறுத்தது. பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியை ஈர்ப்புச் சக்தி முடுக்கம் 'g' என்று குறிக்கிறோம். செய்முறைகளின்படி h உயரத்தில் ϕ அகலாங்குள்ள இடத்தில் $g = 32{\cdot}089\ [1+0{\cdot}00524\ \sin^2\phi]\ [1-0{\cdot}000000096\ h]$ அடி/(விநாடி)^2 ஆகும். ஆனால் g-க்கு 32 அடி/(விநாடி)^2 என்ற மதிப்பைக் கொடுப்பது ஒரு நல்ல தோராயமாகும்.

(4) **விறைப்புப் பொருள்கள் :** இயற்கையிலுள்ள பொருள்கள் ரப்பரைப்போல் மிருதுவாகவும் இரும்பைப்போல் கடினமாகவும் இருக்கலாம். மிகக் கடினமான பொருளுக்கும்கூட அதிக அளவுள்ள விசையினால் அதன் உருவமும் அளவும் மாறக்கூடும். ஆனால், பரிமாணமேயில்லாத பொருளாகத் துகளைக் கருதுவது போல் விறைப்புப் பொருளை அளவு, உருவம் எதிலும் மாறாத ஒன்றாகக் கருதுவது இயக்கவியலின் அடிப்படைக் கொள்கைகளில் ஒன்றாகும்.

(5) **குறியீட்டச்சு :** நடைமுறையில் நிகழும் நிகழ்ச்சிகளைப்பற்றிக் கூறும்போது இடம், காலம் இவைகளைப்பற்றி விவரிக்கிறோம். இடம் என்னும்போது பூமியைப் பொறுத்து நிகழ்ச்சி நடக்கும் இடத்தின் அகலாங்கு, நெட்டாங்கு இவைகளைக் குறித்தால் போதும். இங்குப் பூமியைக் குறியீட்டச்சாகக் கொள்கிறோம். ஆனால், வானியலில் குறிப் பிட்ட நட்சத்திரங்களைப் பொறுத்து, தூரங்களை அளப்பது உண்டு. இங்கு அந்த நட்சத்திரங்களைக் குறியீட்டச்சாகக் கருதலாம். எப்படி

யாயினும் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளைக் குறியீட்டச்சாகக் கொண்டு மற்றப் பொருள்களின் இயக்கங்களைப்பற்றி ஆராய்வோம்.

(6) **காலம்:** நடக்கும் நிகழ்ச்சிக்கு இடம் மட்டும் முக்கியமன்று. காலமும் அவசியம்தான். காலங்கள் மாறும்போதும் கால இடைவெளிகள் மாறும்போதும் செய்முறை முடிவுகள் மாறலாம். ஒரு செய்முறையைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்வதாகக் கொள்வோம். முதல் செய்முறை முடிந்தவுடன் அடுத்த செய்முறை ஆரம்பிப்பதாக எடுத்துக் கொண்டால் முதல் செய்முறை ஆரம்பிக்கும் நேரத்தை $t=0$ என்றும், இரண்டாவது செய்முறை ஆரம்பிக்கும் நேரத்தை $t=1$ என்றும், மூன்றாவது ஆரம்பிக்கும் நேரத்தை $t=2$ என்றும் குறிப்போம். இப்படிப்பட்ட செய்முறையில் கொடுக்கப்பட்ட அலகு நேரத்தை **நியூட்டோனியன் அலகு** என்கிறோம். ஆனால் வழக்கத்தில் காலத்தின் அலகு விநாடியாகும். விநாடி என்பது ஞாயிற்று நாளில் 86,400 பகுதியில் ஒன்றாகும். [அதேபோல் C.G.S. முறையில் அளவின் அலகு மீட்டர் என்பது நிறைகள் அளவுகள் இவைகளுக்கான சர்வதேசக் குழு 0°C உஷ்ணத்தில் வைத்திருக்கும் இரு பிளாட்டினம் - இருடியம் துண்டுகளுக்கிடையேயுள்ள தூரமேயாகும்.]

(7) **அலகுகள் (Units):** திணிவு அளவு, காலம் இவைகளைப் பற்றி ஆராய்ந்தோம். அதன் அலகுகள் C.G.S., F.P.S. முறையில் கீழே உள்ளன.

	C.G.S.	F.P.S.
நீளம்	செ.மீ.	அடி
திணிவு	கிராம்	பவுண்டு
காலம்	விநாடி	விநாடி

2. திசைவேகமும் முடுக்கமும்
(Velocity and Acceleration)

வேகம் (Speed)

வரையறை : ஒரு நகரும் புள்ளி அதன் பாதையை நிர்ணயிக்கும் விதத்தை வேகம் என்கிறோம். வேகம் இயக்கத்தின் திசையைப்பற்றி ஆராயாமல் இயக்கத்தின் வீதத்தை மட்டும் குறிக்கிறது. அதாவது வேகத்திற்கு அளவுண்டு ; ஆனல், திசை கிடையாது.

திசையைப் பொறுத்து அமையாமல் அதன் அளவை மட்டும் பொறுத்திருக்கும் கணியத்தை **எண்கணிய**மென்கிறோம். எனவே, வேகம் ஓர் எண்கணியமாகும். எண்கணியத்தின் மற்ற உதாரணங்கள் : திணிவு, தூரம், அடர்த்தி (density), நேரம் இவைகளாகும்.

நேரங்களின் அளவுகள் எவ்வளவு குறுகியதாக இருந்தாலும் சம நேரத்தில் பாதையில் சம நீளங்களை ஒரு புள்ளி கடக்குமானல், அந்தப் புள்ளி **ஒரே சீரான வேகத்தில்** (uniform speed) செல்லுகிறதெனலாம்.

ஒரே சீரான நிலையில் இருக்கும்போது ஒரு புள்ளியின் வேகம், நேரத்தின் ஓர் அலகில் எவ்வளவு தூரம் சென்றிருக்கிறதென்பதேயாகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் நகரும் புள்ளியின் சராசரி வேகத்தைக் கண்டுபிடிக்கப் புள்ளி சென்றிக்கும் தூரத்தை இடைவெளி நேரத்தால் வகுக்கவேண்டும்.

குறிப்பு : ஓர் இரயில் மணிக்கு 60 கி.மீ. வேகத்தில் செல்லுகிறதென்று கொள்ளுவோம். அதாவது வேகம் நிலையாக இருந்தால் ஒரு மணியில் 60 கி.மீ. தூரம் சென்றிருக்கும். வேகம் ஒரே சீரான நிலையில் இருக்க வேண்டுமானல் ஒரு நிமிடத்துக்கு 1 கி.மீ. ஒரு விநாடிக்கு $\frac{50}{3}$ மீ. சென்றிருக்க வேண்டுமென்ருகிறது.

1·1. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் வேகத்தின் அளவை

வரையறை: குறிப்பிட்ட நேரத்துக்கு அடுத்த 't' நேரத்தில் 's' தூரம் ஒரு புள்ளி சென்றிருக்குமானால் 't' நேரத்தை மிகமிகச் சிறியதாகக் கொள்ளும்போது $\frac{s}{t}$-ன் வரம்பே வேகத்தின் அளவையாகும்.

வகை நுண்கணிய (Differential calculus) முறைப்படி ஒரு புள்ளி 't' நேரத்தில் 's' தூரம் செல்லுவதாகவும், '$t+\Delta t$' நேரத்தில் '$s+\Delta s$' தூரம் செல்வதாகவும் கொண்டால் திசைவேகத்தின் அளவை $= \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$யே ஆகும்.

1·2. நேரம், தூரம் இவைகளின் அலகுகள்

1. C.G.S. முறைப்படி நேரத்தின் அலகை விநாடியாகவும் தூரத்தின் அலகை செ.மீ. ஆகவும் கொள்ளவேண்டும்.

2. F.P.S. முறைப்படி நேரத்தின் அலகை விநாடியாகவும் தூரத்தின் அலகை அடியாகவும் கொள்ளவேண்டும்.

நாட்டில் இப்போது பழக்கத்திலுள்ள C.G.S. முறையை நாம் பின்பற்றுவோம்.

அலகு நேரத்தில், தூரத்தில் ஓர் அலகு தூரம் செல்லும் புள்ளியின் வேகத்தை, வேகத்தின் அலகெனலாம். அதாவது ஒரு புள்ளி 'u' வேகத்தில் சென்றால், அலகு நேரத்தில் u அலகு தூரம் புள்ளி நகர்ந்திருக்கும். எனவே 't' அலகு நேரத்தில் புள்ளி 'ut' அலகு தூரம் நகர்ந்திருக்கும். புள்ளி நகர்ந்த தூரத்தை 's' என்று கொண்டால் $s = ut$ என்றாகிறது.

2. இடப்பெயர்ச்சி (Displacement)

ஒரு நகரும் புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சியானது அதன் நிலையில் ஏற்படும் மாறுதலையே குறிக்கும். புள்ளியின் நிலையில் மாறுதல் ஏற்படும்போது அந்தப் புள்ளி எவ்வளவு தூரம் சென்றிருக்கிறது, எந்தத் திசையில் சென்றிருக்கிறது என்ற இரு வித்தியாசங்களைக் கவனிக்க வேண்டும். எனவே, புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சி திசை, நீளத்தின் அளவை இவைகள் இரண்டையும் பொறுத்திருக்கிறது.

உதாரணமாக ஒரு மோட்டார் கார் 120 கி.மீ. நேர் வடக்காகச் சென்று பின் 50 கி.மீ. நேர் கிழக்கே சென்றால் அந்தக் காரின் இடப்பெயர்ச்சி புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து 130 கி.மீ. தூரத்திலுள்ளது.

அதன் திசை வடக்கிலிருந்து கிழக்குப் பக்கமாக "$\tan^{-1}\frac{5}{12}$" கோணத்திலுள்ளது என்கிறோம்.

3. திசைவேகம் (Velocity)

வரையறை : நகரும் புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சியின் வீதமே, திசைவேகமாகும்.

எனவே திசைவேகத்திற்கு, திசையும் நீளத்தின் அளவும் உண்டு.

குறிப்பு : திசையும், அளவுமுள்ள கணியத்தை வெக்டர் கணியமென்கிறோம். அதனுல் திசைவேகம் ஒரு வெக்டர் கணியமாகும்.

எவ்வளவு சிறியதாக இருந்தாலும் அப்படிப்பட்ட சமநேரத்தில் சம தூரங்களை நிலையான திசையில் ஒரு புள்ளி கடந்தால் அந்தப் புள்ளி ஒரே சீரான திசைவேகத்தையுடையதென்கிறோம்.

அதாவது திசைவேகம் ஒரே சீராகவுள்ளபோது ஓர் அலகு நேரத்தில் ஏற்படும் இடப்பெயர்ச்சியின் அளவைக்கொண்டு திசைவேகத்தைக் குறிக்கிறோம். அப்படியில்லாதபோது ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரு புள்ளியின் திசைவேகத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம் : குறிப்பிட்ட நேரத்துக்கு அடுத்த 't' நேரத்தில் 'ஃ' இடப்பெயர்ச்சி அடைந்திருக்குமானுல், 't' நேரத்தை மிகமிகச் சிறியதாகக்கொள்ளும்போது $\frac{ஃ}{t}$-ன் வரம்பே திசைவேகத்தின் அளவையாகும்.

வகை நுண்கணிய முறைப்படி ஒரு புள்ளி 't' நேரத்தில் 'ஃ' இடப்பெயர்ச்சி அடைவதாகவும் '$t+\Delta t$' நேரத்தில் 'ஃ$+\Delta$ஃ' இடப்பெயர்ச்சி அடைவதாகவும் கொண்டால், திசைவேகத்தின் அளவை $= \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta ஃ}{\Delta t} = \frac{dஃ}{dt}$யே யாகும்.

3·1. அலகு

சாதாரணமாகத் திசைவேகத்தை மணிக்கு இவ்வளவு கி.மீ. வேகமென்ருே, அல்லது விநாடிக்கு இவ்வளவு செ.மீ. வேகமென்ருே குறிக்கிறோம்.

குறிப்பு : வேகத்திற்கும் திசைவேகத்திற்குமுள்ள வித்தியாசத்தைச் சற்று ஆராய்வோம். வேகம் ஒரு எண்கணியமாகும். ஆனுல், திசைவேகம் ஒரு வெக்டர் கணியமாகும். நகரும் புள்ளி ஒரு நேர்கோட்டில் செல்லும்போது அதாவது ஒரே திசையில் செல்லும்

போது வேகமும் திசைவேகமும் ஒன்றேயாகும். அப்படி யின்றி நகரும் புள்ளி ஒரு வட்டத்தில் ஒரே சீராக நகருவதாகக் கொள்ளுவோம். அப்பொழுது புள்ளி வில்லின் சமநீளத்தைச் சமநேரத்தில் கடக்கிற தென்கிறோம். (அந்நேரம் எவ்வளவு குறைவாக இருந்தாலும் தவறில்லை). ஆனல் புள்ளி நகரும் திசை, நேரத்திற்கு நேரம் மாறுபடுகிறது. ஏனெனில் புள்ளியின் திசை அந்தப் புள்ளியில் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் திசையேயாகும். எனவே, இந்த உதாரணத்தில் வேகம் மாறிலியாகவும், திசைவேகம் மாறி யாகவும் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

அலகு நேரத்தில் ஒரு புள்ளி ஓர் அலகு தூரத்திற்குச் சமமான இடப்பெயர்ச்சியை அடையும்போது ஏற்படும் திசைவேகத்தின் அளவை, **அலகு திசைவேகம்** என்கிறோம்.

திசையும் நீளத்தின் அளவும் தெரியும்போது ஒரு புள்ளியின் திசை வேகத்தைக் கணிக்கலாம். ஆகவே நகரும் புள்ளியின் திசைவேகத்தை AB என்ற நேர்கோட்டில் குறிக்கலாம். அதாவது நகரும் புள்ளிகளின் திசைவேகங்களை AB, CD என்ற நேர்கோட்டால் குறித்தால், புள்ளி கள் AB, CD என்ற திசைகளில் நகருகின்றன என்றும், வேகத்தின் அளவைகள் AB, CD நேர்கோடுகளின் நீளங்களுக்கு விகித சமங்க ளெனவும் கொள்ளலாம்.

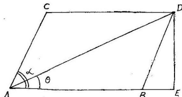
ஒரு பொருளுக்கு ஒரே சமயத்தில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட திசை வேகங்கள் இருக்கலாம். உதாரணமாக நகரும் இரயில் வண்டிக்குள் இருக்கும் ஒரு சிறுவன் ஓடுவதாக வைத்துக்கொள்வோம். அவனுக்கு, வண்டியுடன் ஓர் இயக்கமும், அவன் ஓடுவதால் உண்டாகிற ஓர் இயக்கமும் உண்டு. இந்த இரு இயக்கங்களையும் கூட்டும்போது ஏற் படும் இயக்கமே, பையனுக்கு முப்பரிமாண வெளியில் ஏற்படும் இயக்க மாகும்.

இரு திசைவேகங்களுக்குச் சமமாகவுள்ள திசைவேகத்தை எப்படிக் கண்டுபிடிப்பதென்பதைக் காண்போம்.

3·2. திசைவேகங்களின் இணைகர விதி (Parallelogram law of velocities)

ஒரு நகரும் புள்ளியின் திசைவேகங்களின் திசைகளையும் நீளங் களின் அளவுகளையும் ஓர் இணைகரத்தின் மூலையின்வழியாகச் செல்லும் இரு பக்கங்களால் குறித்தால் அம் மூலையின்வழிச் செல்லும் இணைகரத் தில் மூலைவிட்டத்தின் நீளம், திசை, திசைவேகங்களின் வெக்டார் கூட்டுத்தொகையின் நீளத்தையும், திசையையும் குறிக்கின்றன.

ஒரு நகரும் புள்ளியின் திசைவேகங்களை AB, AC என்ற இரு நேர்கோடுகளால் விளக்கலாம். வேகங்களின் அளவைகளை 'u', 'v' எனக் கொள்க. $ABDC$ என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.



படம் 1.

புள்ளியின் இயக்கம் 'u' திசைவேகத்துடன் AB என்ற நேர் கோட்டில் அமைவதாகக் கொண்டால் AB என்ற நேர்கோடு அதற்கு இணையாக இயங்குகிறது. அப்போது A என்ற புள்ளி 'V' என்ற திசைவேகத்துடன் AC என்ற நேர்கோட்டில் இயங்கும். அலகு நேரத் தில் A என்ற புள்ளி AB நேர்கோட்டில், AB தூரம் சென்று Bஐ அடையும். அதே நேரத்தில் AB அதற்கு இணையாக நகர்ந்து CDஐ அடையும். அதாவது 'A' புள்ளி Bஐ அடைவதற்குள் 'B' புள்ளி D புள்ளிக்கு இடம் மாறிவிடும். எனவே A என்ற புள்ளி கடைசியாக D புள்ளியைச் சேரும்.

மற்ற இரு திசைவேகங்கள் திசைகளிலும், நீள அளவுகளிலும் மாறிலியாக இருப்பதால் A என்ற புள்ளியிலிருந்து D என்ற புள்ளிக் குச் செல்லும் புள்ளியின் திசைவேகம் மாறிலியாகும். எனவே AD அந்தத் திசைவேகத்தை முழுமையாகக் குறிக்கும்.

3·3. விளைவு, கூறு (Resultant, Component)

வரையறை : ஒரு திசைவேகம் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற் பட்ட திசைவேகங்களுக்குச் சமமானால் அந்தத் திசைவேகத்தை மற்றவைகளின் விளைவு என்றும் மற்றத் திசைவேகங்களை விளைவின் கூறுகளென்றும் கூறலாம்.

இடையேயுள்ள கோணம் 'α' என்றுள்ள திசைகளைக்கொண்ட திசைவேகங்கள் 'u', 'V' என்றால் அந்தத் திசைவேகங்களின் விளை வைக் கண்டுபிடி.

படம் 1-ல் AB, AC என்ற கோடுகள் u, V என்ற திசைவேகங்களை விளக்கட்டும். $\angle BAC = \alpha$ என்று கொள்க.

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB.BD \cos \angle ABD$. AD என்ற நேர்கோடு நிர்ணயிக்கும் விளைவு திசைவேகத்தை 'W' என்று கொண்டால்

$$W^2 = u^2 + V^2 + 2uV \,.\, \cos\alpha \quad [\because \angle ABD = 180 - \alpha]$$

மேலும் $$\frac{\sin B\hat{A}D}{\sin A\hat{D}B} = \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{V}{u} \quad [\angle BAD = \theta \text{ எனக் கொள்க.}]$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta} = \frac{V}{u}$$

$$u \tan\theta = V\sin\alpha - V\cos\alpha.\ \tan\theta$$

$$\therefore \tan\theta\ [u + V\cos\alpha] = V\sin\alpha \text{ எனவே}$$

$$\tan\theta = \frac{V\sin\alpha}{u + V\cos\alpha} \text{ ஆகும்.}$$

'α' கோணத்தை இடையே கொண்ட 'u', 'V' என்ற இரு திசைவேகங்களின் விளைவு $\sqrt{u^2 + V^2 + 2uV\cos\alpha}$ என்ற அளவையும், 'u' திசைவேகத்தின் திசைக்கு $\tan^{-1}\left(\frac{V\sin\alpha}{u + V\cos\alpha}\right)$ என்ற கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் திசையையும் கொண்டது.

குறிப்பு: ஒரு திசைவேகத்தை இரு கூறுகளாக எத்தனையோ வழிகளில் பிரிக்கலாம். ஏனெனில், ADஐ மூலைவிட்டமாகக் கொண்ட இணைகரங்கள் ஏராளமாகும். அவைகளில் $ABCD$ ஓர் இணைகரமானால் ADஐ AB, AC என்ற கூறு திசைவேகங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

இத்தனை இணைகரங்களில் ADஐ மூலைவிட்டமாகக் கொண்ட நீண்ட சதுரத்தைக் கவனிப்போம். அப்போது கூறு திசைவேகங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைகின்றன.

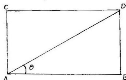
$\angle BAD = \theta$ என்றால்

$$AB = AD\cos\theta = W\cos\theta$$

$$AC = AD\sin\theta = W\sin\theta$$

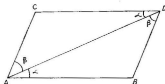
எனவே 'W' என்ற திசைவேகம் அதன் திசைக்கு θ கோணத்தை உண்டாக்கும் திசையிலுள்ள திசைவேகம் '$W\cos\theta$' எனவும் ஆகவே

முதல் கூறுக்குச் செங்குத்தான திசையிலுள்ள திசைவேகம் '$W \sin\theta$' எனவும் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம்.



படம் 2.

'W' என்ற திசைவேகத்தை அதன் திசைக்கு α, β என்ற கோணங்களை உண்டாக்கும் திசைகளில் வரையப்படும் திசைவேகங்களைக் கண்டுபிடிக்க. 'W' என்ற திசைவேகத்தை AD என்ற நேர்கோடு, திசையிலும் நீளத்தின் அளவையிலும் குறிக்கட்டும். AD-க்கு அதன்



படம் 3.

இரு பக்கங்களிலும், பக்கத்துக்கொன்றாக α, β என்ற கோணங்களை உண்டாக்கும் AB, AC என்ற நேர்கோடுகள் வரைக. D என்ற புள்ளியின் வழியாக CA-க்கு இணையாக DB என்ற நேர்கோடும் BA-க்கு இணையாக DC என்ற கோடும் வரைக. இதன் மூலம் $ABCD$ என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

$$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin(\pi - \overline{\alpha+\beta})}$$

$$= \frac{AD}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore\ AB = \frac{AD \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

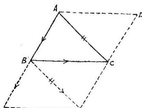
$$= \frac{W \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$AC = BD$$

$$= \frac{AD \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{W \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

3·4. திசைவேகங்களின் முக்கோண விதி (Triangle law of velocities)



படம் 4.

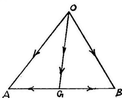
ஒரு முக்கோணத்தின் AB, BC என்ற இரு பக்கங்கள் விளக்கும் திசைவேகங்களை ஒரு நகரும் புள்ளி கொண்டிருந்தால் அந்தத் திசை வேகங்கள், முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கமாகிய AC விளக்கும் திசைவேகத்திற்குச் சமமாகும். AB, BC நேர்கோடுகளால் விளக்கப் படும் திசைவேகங்களின் விளைவு AC-ன் திசையாகவும் அதன் அளவை யாகவும் உள்ளதைக் கவனிக்கவும்.

3·4-1. கிளைத்தேற்றம் 1

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களால் முறையே விளக்கப் படும் திசைவேகங்களையுடைய புள்ளி நிலைமாற்றமில்லாமலிருக்கும். அதாவது AB, BC, CA என்ற நேர்கோடுகள் விளக்கும் திசை வேகங்களையுடைய புள்ளி அசையாமலிருக்குமெனக் காண்க.

3·4-2. கிளைத்தேற்றம் 2

$\lambda \cdot OA$, $\mu \cdot OB$ என்பவைகளால் விளக்கப்படும் திசைவேகங்கள் $(\lambda+\mu) \cdot OG$ என்ற திசைவேகத்திற்குச் சமம். [G, AB-யின்மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. மேலும்
$\lambda \cdot AG = \mu \cdot GB$ ஆகும்.]

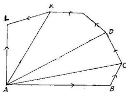


படம் 5.

திசைவேகங்களின் முக்கோண விதிப்படி $\lambda \cdot OA$ என்ற திசைவேகம், $\lambda \cdot OG$, $\lambda \cdot GA$ என்ற திசைவேகங்களுக்குச் சமம். அதே போல் $\mu \cdot OB$, $\mu \cdot OG$, $\mu \cdot GB$ என்ற திசைவேகங்களுக்குச் சமம். $\lambda \cdot GA$, $\mu \cdot GB$ என்ற திசைவேகங்கள் அளவைகளில் ஒன்றாகவும், திசையில் நேர் எதிராகவும் உள்ளதால் அவை ஒன்றையொன்று நீக்குகின்றன. எனவே விளைவு திசைவேகம் $(\lambda+\mu) \cdot OG$-க்குச் சமம்.

3·5. திசைவேகப் பலகோண விதி (Polygon law of velocities)

AB, BC, CD......KL என்ற பலகோணத்தின் பக்கங்கள் விளக்கும் திசைவேகங்களை ஒரே நேரத்தில், ஒரு நகரும் புள்ளி கொண்டிருந்தால் விளைவு திசைவேகம் AL என்ற கோட்டினால் விளக்கப்படும். AB, AC கோடுகளால் விளக்கப்படும் திசைவேகங்களின் விளைவு, AC கோட்டால் விளக்கப்படும். AC, CD கோடுகளால் விளக்கப்படும் திசைவேகங்களின் விளைவு AD என்ற கோட்டால் விளக்கப்படும். அதே போலக் கடைசியாக AL என்ற நேர் கோடு எல்லாத் திசைவேகங்களின் விளைவையும் விளக்கும்.



படம் 6.

3·5-1. கிளைத்தேற்றம்

L என்ற புள்ளி A என்ற புள்ளியுடன் இணைந்தால் புள்ளி அசைவில்லாமலிருக்கிறதெனக் கொள்ளலாம்.

3·5-2. குறிப்பு

தேற்றத்தில் பலகோணத்தின் பக்கங்கள் ஒரே சமதளத்தில் அமையவேண்டுமென்பதில்லை.

ஒரு புள்ளி ஒரே நேரத்தில் பல திசைகளிலுள்ள திசைவேகங்களைக் கொண்டிருந்தால் அந்தத் திசைவேகங்களைக் கண்டுபிடிக்க:

புள்ளியை 'O' என்று கொள்ளவும். ஒவ்வொரு திசைவேகத்தையும் O-ன் வழியாகச்செல்லும் செங்குத்தான இருதிசைகளில் பிரிக்கவும். OX, OY என்ற இரு நேர்கோடுகளை எடுத்துக்கொள்ளுவோம். $\angle XOY = 90°$ எனக் கொள்க. 'v_1' என்ற திசைவேகம் OX என்ற நேர்கோட்டுடன் 'α_1' கோணத்தை உண்டாக்கினால், 'v_1'ஐ பிரிக்கும்போது OX, OY திசைகளில் அதன் கூறுகள் முறையே $v_1 \cos\alpha_1$, $v_1 \sin\alpha_1$ ஆகும். அதேபோல் மற்றத் திசைவேகங்களின் கூறுகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம். எனவே OX, திசைக்கு இணையாக, திசைவேகங்களின் கூறுகளின் கூடுதல் $v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2 \ldots + v_n \cos\alpha_n = v$ ஆகும். அதேபோல் OY, திசைக்கு இணையாக, கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை $v_1 \sin\alpha_1 + v_2 \sin\alpha_2 \ldots\ldots + v_n \sin\alpha_n = W$ என்றாகும். எனவே திசைவேகங்களின் விளைவு

$$= \sqrt{(v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2 \ldots + v_n \cos\alpha_n)^2 + (v_1 \sin\alpha_1 + v_2 \sin\alpha_2 \ldots + v_n \sin\alpha_n)^2}$$

என்ற அளவையாகும். அதன் திசை OX-க்கு

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{v_1 \sin\alpha_1 + v_2 \sin\alpha_2 \ldots\ldots + v_n \sin\alpha_n}{v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2 \ldots\ldots + v_n \cos\alpha_n}\right]$$

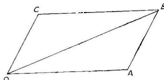
என்ற கோணத்திலுள்ளதாகவும் அமைகிறது.

ஓர் இணைகரத் திண்மத்தின் புள்ளியின் வழியாகச்செல்லும் மூன்று விளிம்புகள் (edges) ஒரு நகரும் புள்ளியின் மூன்று திசைவேகங்களைக் குறித்தால், அந்தத் திசைவேகங்களின் விளைவு, விளிம்புகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும், இணைகரத் திண்மத்தின் மூலை விட்டத்தால் விளக்கலாம். இதைத் திசைவேகங்களின் இணைகரத் திண்மவிதி எனலாம்.

4. திசைவேகத்தின் மாறுதல்

குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரு புள்ளி, OA என்ற நேர்கோடு குறிக்கும் திசைவேகத்தில் நகரட்டும். மற்றொரு நேரத்தில் அந்தப் புள்ளி OB நேர்கோடு குறிக்கும் திசைவேகத்தில் நகருவதாகக் கொள்ளுவோம். ABஐ சேர்த்து $OABC$ இணைகரத்தைப் பூர்த்திசெய்க. OA, OC கோடுகள் குறிக்கும் திசைவேகங்கள், OB நேர்கோட்டால் விளக்கப்

படும், திசைவேகத்திற்குச் சமமென்பது தெளிவு. எனவே, OA நிர்ணயிக்கும் திசைவேகத்துடன் OC குறிக்கும் திசைவேகத்தைச் சேர்த்தால்,



படம் 7

OB விளக்கும் திசைவேகம் கிடைக்கும். ஆதலால் திசைவேகத்தின் மாறுதலை OC என்ற கோடு குறிக்கிறது.

குறிப்பு : இரண்டு திசைவேகங்களின் அளவைகளிலுள்ள வித்தியாசம் திசைவேகத்தின் மாறுதலைக் குறிக்காதென்பதைக் காண்க.

4·1. முடுக்கம் (Acceleration)

வரையறை : திசைவேகத்தின் மாறுதலின் வீதத்தை, அசையும் புள்ளியின் முடுக்கம் என்கிறோம்.

எனவே முடுக்கத்திற்கு, திசையும் அளவையும் உண்டென்பதைக் காண்க. ஆதலால் முடுக்கம் ஒரு வெக்டர் கணியமாகும்.

எவ்வளவு சிறியதாக இருந்தாலும் சமநேர் இடைவெளிகளில் திசைவேகங்களின் மாறுதல்கள் சமமாக இருந்தால் முடுக்கம் சமச்சீராக உள்ளதெனலாம். அப்போது அலகு நேரத்தில் ஏற்படும் திசைவேகத்தின் மாறுதலைக் கொண்டு முடுக்கத்தை நிர்ணயிக்கலாம்.

't' நேரத்திலுள்ள திசைவேகத்துடன் 'Δv' திசைவேகத்தைச் சேர்த்தால் '$t+\Delta t$' நேரத்திலுள்ள திசைவேகமாக ஆகுமென்றால் சராசரி முடுக்கம் $= \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ என்றாகும்.

$$\text{'}t\text{' இடத்து முடுக்கம்} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

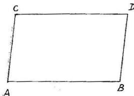
அலகு நேரத்தில், திசைவேகம் ஓர் அலகாகக்கொண்டால், அப்போது ஏற்படும் முடுக்கத்தின் அளவை, ஒரு முடுக்க அலகாகும். ஒரு முடுக்க அளவை 1 செ.மீ./(விநாடி)^2 என்று எழுதலாம். அதாவது

ஒவ்வொரு விநாடியிலும் விநாடிக்கு ஒரு செ.மீ. நகரும் புள்ளியின் முடுக்கத்தின் அளவையே ஓர் அலகாகும்.

குறிப்பு : துகளின் இயக்கத்தின் எதிர்திசையில், முடுக்கம் இருந்தால், அந்த முடுக்கத்தை எதிர்முடுக்கம் (Retardation) என்போம்.

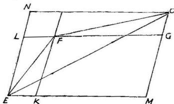
4·2. முடுக்கத்தின் இணைகர விதி

ஓர் இணைகரத்தின் மூலையின்வழியாகச் செல்லும் இரு பக்கங்கள் ஒரு நகரும் புள்ளிக்கு ஒரே சமயத்தில் ஏற்படும் இரு முடுக்கங்களை விளக்கினால் அந்த இரு முடுக்கங்களின் விளைவு அந்த மூலையின் வழியாகச் செல்லும் மூலைவிட்டம் விளக்கும் முடுக்கத்துக்குச் சமம்.



படம் 8.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு முடுக்கங்களை இணைகரம் $ABCD$-ன் பக்கங்கள் AB-ம், AC-ம் விளக்கட்டும். அதாவது அலகு நேரத்தில் நகரும் புள்ளியின் திசை வேகத்துடன் சேர்த்த திசை வேகங்களை AB, AC விளக்கட்டும்.



படம் 9.

அந்த அளவு திட்டத்தில் அலகு நேரத்தின் ஆரம்பத்திலுள்ள திசைவேகத்தை EF விளக்கட்டும். பக்கங்கள் AB-க்கும், AC-க்கும் இணையாகக்கொண்டு $EKFL$ என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

$KM = AB$ என்னும்படி EKஐ நீட்டுக. அதே போல் $LN = AC$ என்னும்படி ELஐ நீட்டுக. $EMON$ இணைகரத்தையும் பூர்த்தி செய்க.

திசைவேகம் EF, திசைவேகங்கள் EK, EL-க்குச் சமம். ஆனால் அலகு நேரத்தில் KM, LN என்பவை, திசைவேகங்களின் மாறுதலைக் குறிக்கிறது. எனவே அலகு நேரத்தின் முடிவில் கூற்று திசைவேகங்கள் EM-ம் EN-ம் ஆகும். ஆகையால் அவை இரண்டும் EO-க்குச் சமம். ஆனல் EO என்பது EF, FO விளக்கும் திசைவேகங்களுக்குச் சமம். எனவே அலகு நேரத்தில் FO திசைவேகத்தின் மாறுதலைக் குறிக்கிறது. அதாவது FO, புள்ளியின் விளைவு முடுக்கத்தை விளக்குகிறது. மேலும் FO, AD-க்குச் சமமாகவும், இணையாகவும் உள்ளது.

AB, AC விளக்கும் முடுக்கங்களின் விளைவு முடுக்கத்தை AD குறிக்கிறது.

5. ஓய்வும் இயக்கமும் (Rest and Motion)

எல்லா இயக்கங்களும் எதையாவது சார்ந்தேயுள்ளன. மனிதன் 5 கி.மீ. வேகத்தில் நடக்கிறான் என்று கொண்டால் நாம் வாழும் பூமியின் இயக்கத்தைச் சார்ந்து மனிதனின் வேகம் 5 கி.மீ. என்பது பொருள். பூமியில் நடக்கும் மனிதன், பூமி தன் அச்சைச்சுற்றிச் சுழலும்போதும் பூமி, சூரியனைச்சுற்றி வரும்போதும் அத்துடன் இயங்குகிறான். ஆதலின் மற்றவைகளைச் சாராத அவனுக்கு என்று தனி இயக்கம் கிடையாது.

5·1. சார்வேகம் (Relative Velocity)

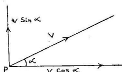
இணையான இரயில் பாதைகளின்மேல், ஒரே திசையில், ஒரே திசைவேகத்துடன் இரு இரயில் வண்டிகள் இயங்குவதாகக் கொள்ளுவோம். ஒவ்வொரு வண்டியிலும் முறையே A, B என்ற இரு இடங்களைக் குறிக்க. A இடத்தில் அமர்ந்திருக்கும் ஒருவன், B இடத்திலுள்ள மற்றொருவனைப் பார்க்கும்போது, அவன் அசையாமல் இருப்பதாக எண்ணுவான். தானே ஒரு வேகத்துடன் செல்லும் வண்டியினுள் அமர்ந்திருப்பதை மறந்துவிடுவான். Aஐயும், Bஐயும் சேர்க்கும் நேர்கோடு, திசையிலும் நீள அளவிலும் மாறுதல் இல்லாமலிருக்கிறது. எனவே Aஐப் பொறுத்தவரை B-க்குத் திசைவேகமே கிடையாது.

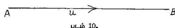
அப்படியல்லாது, முதல் இரயில் வண்டி 40 கி.மீ. வேகத்திலும், மற்ற வண்டி 50 கி.மீ. வேகத்திலும் செல்லுவதாகக் கொள்ளுவோம். அப்போது Aஐயும், Bஐயும் சேர்க்கும் நேர்கோடு மணிக்கு 10 கி.மீ. வீதம் நீளும். அதுவே Aஐப் பொறுத்து, B-ன் சார்வேகமாகும்.

இரண்டு இரயில் வண்டிகளும் எதிர்திசையில் முறையே 40, 50 கி.மீ. வேகத்தில் செல்லுவதாகக் கொள்ளுவோம். அப்போது AB நேர்கோட்டின் நீளம், A புள்ளி இயங்கும் திசைக்கு எதிர் திசையில் 90 கி.மீ. வேகத்தில் அதிகரிக்கும், எனவே Aஐப் பொறுத்து B-ன் சார்வேகம் மணிக்கு 90 கி.மீ. என்று கொள்க.

இந்த வகைகளில் இரண்டாவது இரயிலின் சார்வேகம், தன்னுடைய திசைவேகத்துடன், மற்றதன் திசைவேகத்தைக் கழித்துக் கிடைக்கும் திசைவேகமேயாகும்.

A என்ற புள்ளி 'U' திசைவேகத்துடன் AB திசையில் நகரட்டும். P புள்ளி 'V' திசைவேகத்துடன் PQ திசையில் நகரட்டும். Aஐப் பொறுத்து P-ன் சார்வேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க: PQ திசைக்கும் AB திசைக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் α எனக் கொள்க.





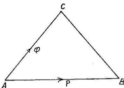
படம் 10.

'V' திசைவேகத்தை AB இணையாக $V \cos \alpha$ என்றும் அதற்குச் செங்குத்தாக $V \sin \alpha$ என்றும் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்க.

AB-க்கு இணையான திசையில் Aஐப் பொறுத்து P-ன் சார் வேகம் $V \cos \alpha - U$ என்றாகும். AB-க்குச் செங்குத்தான திசையில் A-க்கு வேகம் கிடையாது. எனவே அந்தத் திசையில் P-ன் சார்வேகம் $V \sin \alpha$ ஆகும்.

எனவே, Aஐப் பொறுத்து P-ன் சார்வேகத்தின் கூறுகள் AB-க்கு இணையாக $V \cos \alpha - U$ என்ற திசைவேகமும் AB-க்குச் செங்குத்தாக $V \sin \alpha$ என்ற திசைவேகமும் ஆகும்.

இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் திசையிலோ, அளவிலோ அல்லது இரண்டிலுமோ மாறும்போது ஒரு புள்ளிக்கு மற்றொரு புள்ளியைப் பொறுத்து திசைவேகம் உண்டு. அப்போது ஒரு புள்ளியின் சார் வேகம் அதன் திசைவேகத்துடன் மற்றதன் திசைவேகத்தின் அளவையும், எதிர்திசையும் கொண்ட திசைவேகத்தைச் சேர்த்துக் கிடைக்கும் விளைவு வேகமேயாகும். $\overrightarrow{AB}$-ம், $\overrightarrow{AC}$-ம் P, Q என்ற இரு புள்ளிகளின் திசைவேகங்களைக் குறிக்கட்டும்.



படம் 11.

Qஐச் சார்ந்து P-ன் சார்வேகம் $= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; திசைவேகங்களின் முக்கோண விதிப்படி, $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$; எனவே P-ன் சார்வேகம் $= \overline{CB}$ அதேபோல் Pஐச் சார்ந்து Q-ன் சார்வேகம்

$$= \overline{AC} - \overline{AB}$$
$$= \overline{BC}$$

அல்லது திசைவேகங்களின் இணைகர விதிப்படி கணக்கிட : P-ன் திசைவேகத்துடன் Q-ன் திசைவேகத்திற்குச் சம அளவும் எதிர் திசையும் கொண்ட திசைவேகத்தைச் சேர்த்து இணைகர விதிப்படி மூலைவிட்டத்தைக் கணக்கிடவேண்டும்.

5·2. சார்முடுக்கம்

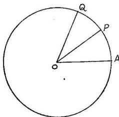
திசைவேகங்களைப்போல் முடுக்கங்களும், இணைகர விதியையும், முக்கோண விதியையும் கடைப்பிடிப்பதால் சார்முடுக்கத்தைச் சார் வேக முறையிலேயே கண்டுபிடிக்கலாம்.

6. கோணவேகம் (Angular Velocity)

ஒரு சமதளத்தில் நிலையான புள்ளியாக 'O'-வையும், நிலையான நேர்கோடாக OA-யையும் எடுத்துக்கொண்டால், சமதளத்தில் நகரும் புள்ளி P-ன் **கோணவேகம்**, $\angle AOP$ கோணம் எந்த விகிதத்தில் அதிகரிக்கிறதென்பதேயாம். கோணவேகம் சமச்சீராக இருந்தால் கோணவேகம், அலகு நேரத்தில் எவ்வளவு ஆரையன்கள் $\angle AOP$ கோணம் உண்டாக்குகிறதென்பதேயாம்.

அப்படியில்லாமலிருந்தால் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அதன் மதிப்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடலாம். குறிப்பிட்ட நேரத்தில் OP திரும்பும் வீதத்தில் 1 விநாடி நேரம் OP திரும்பினால், OP திரும்பும் கோணத்தின் ஆரையன்களின் அளவு கோணவேகமாகும்.

கோணவேகம் என்பது, விநாடிக்கு எவ்வளவு ஆரையன்கள் கோணம் உண்டாக்குகிறதென்பதைக் கொண்டு கணக்கிடலாம்.



படம் 12.

சமச்சீரான வேகத்துடன் P என்ற புள்ளி, O புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தை வரைந்தால், P-ன் கோணவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் புள்ளி P-யிலும் அடுத்த விநாடி Q-விலும் இருப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம். கோணவேகம் $=$ $\angle POQ$-விலுள்ள ஆரையன்கள். $\angle POQ$-ல் ஆரையன்கள் எண்ணிக்கை $= \frac{\text{வில் } PQ}{OP}$. ஒரு விநாடியில் P என்ற புள்ளி PQ என்ற வில்லை வரைவதால், PQ வில்லின் நீளம் $=$ வேகம் 'V'

$$\therefore \text{ கோணவேகம் } `\omega' = \frac{V}{r} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{அல்லது } V = r\omega$$

ஒரு விநாடியில் P என்ற புள்ளி 'n' சுற்றுகளை ஏற்படுத்தினால்

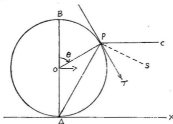
$$`V' = n \times 2\pi r$$

$$\text{எனவே } `\omega' = \frac{n \times 2\pi r}{r}$$

$$= 2\pi n$$

குறிப்பு: கோணவேகம், $\angle POQ$-விலுள்ள ஆரையன்களுக்குச் சமமாதலால், கோணவேகம், OP-ன் நீளத்தைச் சார்ந்ததன்று. ஆனால் OP-யிலுள்ள புள்ளியின் நீளவேகம், அந்தப் புள்ளி O-விலிருந்துள்ள தூரத்தைப் பொறுத்தது. எனவே புள்ளியின் வேகம் கோணவேகத்தை, O-விலிருந்து புள்ளிக்குள்ள தூரத்தைப் பெருக்கிக் கிடைக்கும் பலனேயாகும்.

6·1 தேற்றம்



படம் 13.

ஒரு நேர்கோட்டின்மேல், நழுவாமல் ஒரு வட்டத்தட்டுச் சமச்சீராக உருண்டால் அந்த வட்டத்தட்டின் விளிம்பிலுள்ள புள்ளியின் திசை வேகத்தைக் கணக்கிட: வட்டத்தட்டின் மையம் 'O' எனவும் ஆரை 'r' எனவும் கொள்க. குறிப்பிட்ட நேரத்தில் தட்டின் A என்ற புள்ளியை AX என்ற நேர்கோட்டின் தொடுபுள்ளியாகக் கொள்க. மையம் O 'V' திசைவேகத்துடன் AX திசையில் நகரட்டும். தட்டின் மையம் சீரான திசைவேகத்தில் நகரும்போது, தட்டு, மையத்தைப் பொறுத்துச் சமச்சீராகச் சுற்றுகிறது. மையப்புள்ளி, தட்டின் சுற்றளவு தூரம் நகரும்போது, தட்டின் விளிம்பிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் மையத்தைச் சார்ந்து ஒரு சுற்றளவு தூரம் சுற்று கிறது. எனவே மையத்தைச் சார்ந்து ஒவ்வொரு புள்ளியின் சார் வேகத்தின் அளவை = 'V' அதாவது மையத்தின் திசைவேகம். எனவே Oஐப் பொறுத்து P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியின் கோண வேகம் $= \frac{V}{r}$ ஆகும்.

எனவே இது ஒரு மாறிலி யாகும். தட்டின் விளிம்பிலுள்ள உயர மான புள்ளி B என்று கொண்டால், Oஐப் பொறுத்து B-ன் சார்வேகம் 'V' ஆகும். அதன் திசை B-ல் தட்டின் விளிம்புக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் திசையேயாகும்.

எனவே B-ன் சார்வேகம் கிடைதிசையில் 'V' ஆகும். B-ன் தொடுகோட்டின் திசையும் O-ன் திசையும் ஒன்ருய் இருப்பதால்,

B-ன் திசைவேகம் $= V + V = 2V$ ஆகும்.

A-ம் 'V' வேகத்தில் சுற்றினாலும், A-ன் தொடுகோட்டுத் திசை O-ன் திசைக்கு நேர்மாறாகும். எனவே A-ன் திசைவேகம் $= V - V = 0$ ஆகும். Aஐ நொடி இயக்கமின்மை கொண்டது எனலாம்.

$\angle BOP = \theta$ என்ற கோணத்தைக் கொண்ட புள்ளியைக் கவனிக்க. Oஐச் சார்ந்து P-ன் சார்வேகம், அதாவது PT திசையில் 'V' திசைவேகம், O-ன் சார்வேகம், அதாவது PC திசையில் 'V' திசைவேகம், ஆகிய இந்த இரு திசைவேகங்களைச் சேர்த்துக் கிடைக்கும் திசைவேகமே P-யினுடையதாகும்.

W என்பதை P-ன் விளைவு திசைவேகமாகக் கொண்டால்,

$$W^2 = V^2 + V^2 + 2V^2 \cos\theta \; [\angle CPT = \theta \text{ என்க}]$$
$$= 2V^2 [1 + \cos\theta]$$
$$= 4V^2 \cos^2\frac{\theta}{2}$$

எனவே $W = 2\,V\cos\dfrac{\theta}{2}$

கூறுகள் சம அளவுகள் கொண்டிருப்பதால் 'V' திசை CPT கோணத்தின் சமவெட்டியான PS-ன் திசையாகும்.

APஐச் சேர்த்தால் $\angle OPA = \dfrac{\theta}{2}$

மேலும் $\angle TPS = \dfrac{\theta}{2}$

எனவே $\angle APS = \angle OPT$

$= $ ஒரு செங்கோணம்.

எனவே தட்டின் விளிம்பிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் $2V\cos\dfrac{\theta}{2}$ வேகத்துடன் AP-க்குச் செங்குத்தான திசையில் நகருகிறது. மேலும் $AP = 2r\cos\dfrac{\theta}{2}$ ஆகவே Aஐப் பொறுத்து P-ன் கோணவேகம்

$$= \frac{2V\cos\frac{\theta}{2}}{2r\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{V}{r}$$

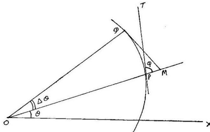
$=$ தட்டின் கோணவேகம்

Aஐப் பொறுத்து, தட்டின் விளிம்பிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளுடைய கோணவேகமும் ஒன்றேயாகும். எனவே Aஐச் **சுற்றின் நொடி மையம்** என்கிறோம்.

6·2. சார்கோண வேகம்

தேற்றம் : ஒரு வளைகோட்டின்மேல் நகரும் ஒரு துகளின் கோணவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க :

வளைகோட்டின்மேல் நகரும் புள்ளி 't' நேரத்தில் P-யிலும் $t+\Delta t$ நேரத்தில் Q-விலும் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.



படம் 14.

PT, P-ல் வளைகோட்டின் தொடுகோடாகக் கொள்க. $\angle XOP = \theta$. $\angle XOQ = \theta + \Delta\theta$. $\angle MPT = \phi$ எனக் கொள்க. $OP = r$, $OQ = r + \Delta r$ என்க. QM, OP-க்குச் செங்குத்தாக அமையட்டும். P-ன் நேர்கோட்டுத் திசைவேகம் 'V' என்றால் 'Δt' நேரத்தில் P, வில்லின்மேல் நகரும் தூரம் $i = V\Delta t$.

Q, P-க்கு வெகு அருகில் இருப்பதால்

நாண் PQ = வில் PQ

$= V \cdot \Delta t$

மேலும் $\angle QPM = \angle TPM$ [P-யும், Q-வும் மிக அருகில் இருப்பதால்]

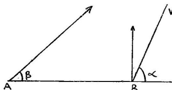
$= \phi$

$$\therefore \quad QM = QP \cdot \sin\phi$$
$$= V \cdot \Delta t \sin\phi$$
$$QM = OQ \sin\Delta\theta$$
$$= (r+\Delta r)\sin\Delta\theta$$
$$= (r+\Delta r)\,\Delta\theta \qquad [\therefore\ \Delta\theta \text{ மிகச் சிறியது}]$$
$$(r+\Delta r)\,\Delta\theta = V \cdot \Delta t \sin\phi$$
$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{V}{r+\Delta r} \cdot \sin\phi$$

எனவே, Oஐப் பொறுத்து P-ன் சார்வேகம்

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{r}\sin\phi.$$

6·3. இரு நகரும் புள்ளிகளுக்கிடையே சார்கோண வேகம்



படம் 15

Aஐப் பொறுத்து B-ன் சார்வேகம் $= \dfrac{V\sin\alpha}{AB}$

$= \dfrac{AB\text{-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் } B\text{-ன் திசைவேகத்தின் கூறு}}{AB}$

எனவே Aஐப் பொறுத்து, B சுற்றும்போது, AB-ன் திசையில் B-ன் திசைவேகத்தின் கூறு ஒரு பயனையும் உண்டாக்குவதில்லை. இப்போது Aஐப் பொறுத்து, B-ன் சார்கோண வேகத்தைக் காண A, B இவைகளின் திசைவேகங்களின் கூறுகளை AB-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் காண்க. அவைகள் முறையே $U\sin\beta$, $V\sin\alpha$ ஆகும். ஆகவே AB-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் Aஐப் பொறுத்து

B-ன் சார்வேகம் $V \sin \alpha - U \sin \beta$ எனலாம். எனவே AB-ப் பொறுத்து B-ன் சார்கோண வேகம் $= \dfrac{V \sin \alpha - U \sin \beta}{AB}$

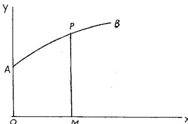
குறிப்பு : $V \sin \alpha = U \sin \beta$ என்றால் B-ன் சார்கோண வேகம் $= 0$ எனவே AB தனக்கு இணையான திசையில் நகரும்.

6·4. கோண முடுக்கம்

வரையறை : கோணவேகம் அதிகரிக்கும் வீதமே கோண முடுக்கமாகும்.

வரைபடம் : சில நேரங்களில் தூரம், காலம் இவைகளின் மதிப்புகள் அல்லது திசைவேகம், காலம் இவைகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது வரைபடங்கள் வரைந்து அவைகளின் மூலம் இயக்கத்துக்குச் சம்பந்தப்பட்ட மற்ற அளவைகளை நிர்ணயிக்கலாம்.

7·1. வெளி, காலம் வரைபடம் (Space-Time Graph)

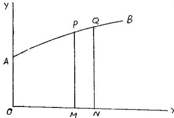


படம் 16.

OX, OY என்ற செங்குத்தான இரு அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். OX அச்சில் காலத்தின் அளவுகளைக் குறிக்கலாம். OY அச்சில் நிலையான புள்ளியிலிருந்து அந்தக் கால அளவுக்கு ஒத்த தூரங்களைக் குறிக்கலாம். PM என்பது P-ன் நிலைத்தூரமாக எடுத்துக் கொண்டால் $OM = t$ குறிக்கும் நேரத்தில், $PM = s$, புள்ளி நகரும் தூரத்தைக் குறிக்கும்.

P-ல் வளைகோட்டின் சரிவு $\frac{ds}{dt}$ ஆகும். எனவே $\frac{ds}{dt}$, P-ன் திசை வேகத்தைக் குறிக்கும். வெவ்வேறு நேரங்களில் வளைகோட்டின் சரிவு களைக் கண்டுபிடித்தால் அந்த நேரங்களில் புள்ளிக்கு ஏற்படும் திசை வேகங்களைக் காணலாம்.

7·2. வேகம், காலம் வரைபடம் (Velocity-Time Graph)



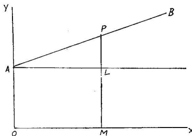
படம் 17.

அச்சுகளில், OX நேரத்தையும், OY அதன் திசைக்கு இணையாக உள்ள ஒத்த திசைவேகங்களையும் குறிப்பதாகக் கொள்ளுவோம். PM, P என்ற புள்ளியின் நிலைதூரத்தைக் குறித்தால், OM குறிக்கும் நேரத்திலுள்ள திசைவேகம் PMஐ விளக்கும். முடுக்கு $= \frac{dv}{dt}$ என்பதால் APB, என்ற வளைகோட்டிலுள்ள புள்ளியின் சரிவு அந்தப் புள்ளியின் முடுக்கத்தைக் குறிக்கும்.

வளைகோட்டில், P-க்கு அருகில் Q என்ற புள்ளியை எடுத்து, QN என்ற நிலைதூரத்தை வரைந்தால், $MN = \Delta t$ ஆகக் கொள்ள லாம். $PMNQ$ என்பதின் பரப்பளவு $PM \,.\, \Delta t$ என்பதின் மதிப்புக்குக் கிட்டத்தட்ட சமமாகும். $PM \,.\, \Delta t = V \,.\, \Delta t$ ஆகும். எனவே $V \,.\, \Delta t$ என்பது Δt நேரத்தில் துகள் நகரும் வெளியின் பரப்பளவைக் கொடுக் கும். ஆகவே t_1, t_2 என்ற நேரங்களுக்கிடையே துகள் நகரும் வெளியின் பரப்பளவு

$$= \int_{t_1}^{t_2} V \,.\, dt = t_1,\ t_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{குறிப்பிடும் நிலைதூரங்களுக்கிடையே} \\ \text{யுள்ள } APB \text{ வளைகோட்டின் பரப்பளவாகும்.} \end{array} \right.$$

குறிப்பு : முடுக்குச் சமச்சீராக உள்ளபோது, அதாவது $\frac{dv}{dt}$ ஒரு மாறிலியாகும்போது வளைகோடு, APB என்ற நேர்கோடாகும்.



படம் 18

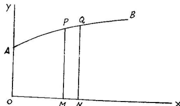
$t\ (=OM)$ நேரத்தில் P துகள் நகரும் வெளியின் பரப்பளவு = $OMPA$-ன் பரப்பளவாகும்.

$= PAL$-ன் பரப்பளவு + நீண்டசதுரம் $AOML$-ன் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}t.ft + Ut$ $[OA = U$ என்று கொண்டால்$]$

$= Ut + \frac{1}{2}ft^2$

7·3. முடுக்கு—நேரம் வரைபடம் (Acceleration–Time Graph)



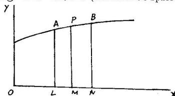
படம் 19.

OX நேரத்தையும், OY திசைக்கு இணையாகவுள்ள முடுக்கின் நேரத்துக்கு ஒத்த மதிப்பையும் குறிப்பதாகக் கொண்டால், APB வளைகோடு ஒரு முடுக்கு - நேரம் வளைகோடாகும். $OM = t$ என்றால் PM அந்த நேரத்திற்குரிய முடுக்கின் அளவைக் குறிக்கும். வளை கோட்டில் P-க்கு மிகச் சமீபமாக, Qஐ எடுத்துக்கொண்டு அதன் நிலை தூரம் QNஐ வரைந்தால், $MN = \Delta t$ ஆகும். $PMNQ$-க்குப் பரப்பளவு. $f \cdot \Delta t$-யின் மதிப்புக்குக் கிட்டத்தட்ட சமமாகும்.

$f . \Delta t$, 'Δt' நேரத்தில் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் மாறுதலைக் குறிக்கும்.

எனவே 't_1', 't_2' நேரங்களுக்குத் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் மாறுதல் $\int_{t_1}^{t_2} f \cdot dt$ ஆகும்.

7·4. முடுக்கு - வெளி - வரைபடம் (Acceleration–Space Graph)



படம் 20.

OX துகள் நகரும் தூரத்தையும், OY அந்த நேரத்தில், OY-க்கு இணையாக உள்ள முடுக்கின் அளவையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். தூரத்தை OMஆல் குறிக்கும்போது, அந்த நேரத்தில் ஏற்படும் முடுக்கின் அளவு PMஆல் குறிக்கப்படும்

$$\int_{OL}^{OM} f ds = \int_{VA}^{VB} V \frac{dv}{ds} \, ds$$

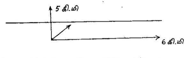
$$= \int_{VA}^{VB} v dv$$

$$= [\tfrac{1}{2}V^2]_{VA}^{VB}$$

எனவே $\frac{1}{2}V^2$-ல் ஏற்படும் மாறுதலின் அளவை AL, BM என்ற நிலை தூரங்களுக்கிடையேயுள்ள APB வளைகோட்டின் பரப்பளவு குறிக்கும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. மணிக்கு 6 கி.மீ. வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் ஆற்றின் நேர் குறுக்கே மணிக்கு 5 கி.மீ. வேகத்தில் ஒரு படகைக் கட்டி இழுக்கிறீர்கள். படகின் விளைவு திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடி. ஆற்றின் அகலம் 200 மீ. என்றால் படகு எவ்வளவு தூரம் தள்ளி ஆற்றின் அக் கரையை அடையும்.



படம் 20A

கூற்று திசைவேகங்கள் 5 கி.மீ., 6 கி.மீ. அவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசையிலுள்ளன. விளைவு திசைவேகத்தின் அளவு $= \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61}$ கி.மீ./மணி. இந்தத் திசைவேகம் கரையுடன் 'α' கோணத்தை உண்டாக்கினால் $\tan\alpha = \frac{6}{5}$ அல்லது $\alpha = \tan^{-1}\frac{6}{5}$

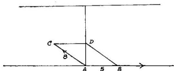
படகு ஆற்றைக் கடக்கும் நேரம் $= \frac{200}{5000}$ மணி

அந்நேரத்தில் படகு ஆற்றின் வேகத்தில், தண்ணீருடன் இழுத்துச் செல்லப்படும் தூரம் $= \frac{120}{}\; \frac{6000 \times 2}{50}$

$= 240$ மீ.

2. 300 மீ. அகலமுள்ள ஓர் ஓடையில் தண்ணீர் மணிக்கு 5 கி.மீ. வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கிறது. ஒரு படகை மணிக்கு 8 கி.மீ. வேகத்தில் அந்த ஓடையில் செலுத்தமுடியும். படகு நேர்குறுக்காக ஆற்றைக் கடக்கவேண்டுமானால், எந்தத் திசையில் படகைச் செலுத்த வேண்டும்? ஆற்றைக் கடக்க எவ்வளவு நேரமாகும்?

AB, AC, AD ஆற்றின் திசைவேகம், படகின் திசைவேகம், விளைவு வேகங்களைக் குறிக்கட்டும். AD கரைக்குச் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டும்.



படம் 21.

$$AD = \sqrt{8^2-5^2} = \sqrt{64-25}$$
$$= \sqrt{39}$$
$$\cos DAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

எனவே படகு AD-யுடன் $\cos^{-1}\frac{\sqrt{39}}{8}$ கோணம் உண்டாக்கும் வகையில் செலுத்தப்படவேண்டும்.

ஆற்றைக் கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் $= \frac{300}{\sqrt{39}\cdot 1000}$ மணி

$= \frac{3}{\sqrt{39}\cdot 10} \times 60 \times 60$ விநாடிகள்

$= \frac{1080}{\sqrt{39}}$ விநாடிகள்

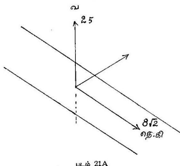
$= 173\cdot 08$ விநாடிகள்

3. தென்கிழக்குத் திசையில் ஓடும் ஆற்றின் வேகம் மணிக்கு $8\sqrt{2}$ கி.மீ. அதில் நேர்வடக்குத் திசையில் ஒரு விசைப்படகு மணிக்கு 25 கி.மீ. வேகத்தில் இழுக்கப்படுகிறது. ஒரு மணிநேரம் கழித்துப் படகு இருக்குமிடத்தைக் கண்டுபிடி.

படகுக்கு வடக்குத் திசையில் மணிக்கு 25 கி.மீ. திசைவேகமும் தென்கிழக்குத் திசையில் மணிக்கு $8\sqrt{2}$ கி.மீ. திசைவேகமும் உள்ளன. தென்கிழக்குத் திசையிலுள்ள படகின் கூற்று திசைவேகத்தை $8\sqrt{2}$ $\cos 45°$ கி.மீ./மணி கிழக்காகவும் $8\sqrt{2}\sin 45°$ கி.மீ./மணி தெற்காகவும் கொள்ளலாம். எனவே படகின் மொத்தக் கூற்று திசைவேகங்கள்

வடக்குத் திசையில் 17 கி.மீ./மணி

கிழக்குத் திசையில் 8 கி.மீ./மணி



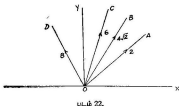
படம் 21A

ஆகவே விளைவு திசைவேகம்.

$$\sqrt{17^2+8^2} = \sqrt{289+64}$$
$$= \sqrt{353} \text{ கி.மீ./மணி}$$

திசை = வடக்குக்கு $\tan^{-1}\frac{8}{17}$ கோணம் உண்டாக்கும் திசை.

4. குறிப்பிட்ட திசையுடன் 30°, 45°, 60°, 120° கோணங்கள் உண்டாக்கும் திசைவேகங்கள் முறையே 2, $4\sqrt{2}$, 6, 8, என்பவைகளை ஒரு புள்ளி ஒரே நேரத்தில் கொண்டிருக்கிறது. அதன் திசை வேகத்தைக் கண்டுபிடி.



படம் 22.

குறிப்பிட்ட திசையை OX எனவும் அதற்கு நேர் எதிரான திசையை OY எனவும் கொள்க. OX திசையில் திசைவேகங்களின் கூறுகள் $2\cos 30°$, $4\sqrt{2}\cos 45°$, $6\cos 60°$, $8\cos 120°$

அதாவது $\sqrt{3},\ 4,\ 3,\ -4$

எனவே அவைகளின் கூட்டுத்தொகை $= 3+\sqrt{3}$

OY திசையில் வேகங்களின் கூறுகள்,

$2\sin 30°$, $4\sqrt{2}\sin 45°$, $6\sin 60°$, $8\sin 120$

அதாவது $1,\ 4,\ 3\sqrt{3},\ 4\sqrt{3}$

எனவே அவைகளின் கூட்டுத்தொகை $= 5+7\sqrt{3}$

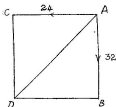
விளைவு திசைவேகம் 'V' என்றால்

$$\begin{aligned} V^2 &= (3+\sqrt{3})^2+(5+7\sqrt{3})^2 \\ &= [9+6\sqrt{3}+3+25+70\sqrt{3}+147] \\ &= [184+76\sqrt{3}] \\ &= 184+131{\cdot}632 \\ &= 315{\cdot}632 \\ V &= 17{\cdot}76 \end{aligned}$$

OX உடன் 'V' ஏற்படுத்துங்கோணம் 'θ' என்றால்

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{5+7\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \\ &= \frac{17{\cdot}124}{4{\cdot}732} \\ &= 3{\cdot}618 \end{aligned}$$

எனவே $\theta = 74\frac{1}{2}°$ (தோராயமாக)



படம் 23.

5. மணிக்கு 24 கி.மீ. வேகத்தில் ஒரு கப்பல் நேர் கிழக்காகச் சென்றுகொண்டிருக்கிறது. அதே நேரத்தில் மற்றொரு கப்பல் நேர் தெற்காக மணிக்கு 32 கி.மீ. வேகத்தில் செல்கிறது. முதல் கப்பலைப் பொறுத்து, இரண்டாவது கப்பலின் சார்வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

AB இரண்டாவது கப்பலின் வேகத்தைக் குறிக்கிறது எனக் கொள்க. அத்துடன் முதல் கப்பல் செல்லும் திசைக்கு எதிர்திசை

யில், அதாவது நேர் மேற்கே திசைவேகம் 24 கி.மீ./மணி-ஐ ACஆல் குறிக்க. சார்வேகம், இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் AD

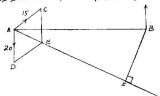
$$AD = \sqrt{32^2+24^2}$$
$$= 40.$$

எனவே சார்வேகத்தின் அளவு

$$= 40 \text{ கி.மீ./மணி}$$

அதன் திசை, மேற்குக்குத் தெற்குத் திசையில் $\tan^{-1} \frac{3}{4}$ கோண முண்டாக்கவேண்டும்.

6. 15 நாவிகள் (Knots) வேகத்தில் செல்லும் ஒரு போர்க் கப்பல் எதிரி சண்டைக் கப்பலை, 8 நாவிக மைல் தூரத்தில் தனக்கு நேர் கிழக்கே காண்கிறது. எதிரி கப்பல் 20 நாவிகள் வேகத்தில் நேர் வடக்கே சென்றுகொண்டிருக்கிறது. எதிரி கப்பலுக்கு அதி சமீபமாகச் செல்ல எந்தத் திசையில் போர்க்கப்பல் நகரவேண்டும்?



படம் 24.

முதல் நிலையில் போர்க் கப்பலையும் சண்டைக் கப்பலையும் A, B என்ற புள்ளிகளால் குறிப்போம். B அசையாதிருக்கிறதென்று கொண்டால், A-க்கு நேர் தென்திசையில் 20 நாவிகள் வேகத்தைக் குறிக்கவேண்டும். A-க்கு உண்டான 15 நாவிகள் வேகத்தை ACஆல் குறிக்கவும். எனவே, AE இவைகளின் விளைவு திசைவேகத்தைக் குறிக்கும் AE, ABஉடன் உண்டாக்கும் கோணம் எவ்வளவு சிறியதாக இருக்கிறதோ, அதைப்பொறுத்து B, A-க்குச் சமீபமாக வருமெனலாம்.

$\angle EAB$ குறைவாக இருக்க $\angle EAD$ மிக அதிகமாக இருக்க வேண்டும். எனவே $\angle EAD = 90°$ ஆகும்.

$$\cos \angle EAB = \sin \angle EAD = \frac{15}{20}$$
$$= \frac{3}{4}$$
$$\sin \angle BAC = \cos \angle EAB = \frac{3}{4}$$

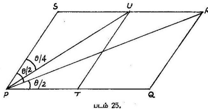
போர்க்கப்பல் கிழக்கு வடக்காக $\sin^{-1} \frac{3}{4}$ கோணமுண்டாக்கும் வகையில்

நகரவேண்டும். A-க்கும், B-க்கும் இடையேயுள்ள குறுகிய தூரம் BF. அது AF-க்குச் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டும்.

$$AF = AB \cdot \cos \angle EAB$$
$$= 8 \times \tfrac{3}{4}$$
$$= 6$$

Bஐப் பொறுத்து, A 6 மைல்கள் சென்றிருக்கும்.

7. சம அளவுகளும், வெவ்வேறு திசைகளும் உடைய திசை வேகங்களை ஒரே சமயத்தில் ஒரு துகள் கொண்டிருக்கிறது. ஒரு திசை வேகத்தின் அளவைப் பாதியாகக் குறைத்திருக்கிறது. விளைவு வேகம் மற்றத் திசைவேகத்தின் திசையுடன் உண்டாக்கும் கோணத்தையும் பாதியாகக் குறைத்திருக்கிறது. இரண்டு திசைவேகங்களுக்கிடையே யுள்ள கோணத்தைக் கண்டுபிடி.



படம் 25.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு திசைவேகங்களையும் PQ, PS என்ற கோடுகளால் விளக்கலாம்.

$$PQ = PS$$

எனவே $PQRS$ இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் PR விளைவு வேகத்தைக் குறிக்கும். மேலும்

$$\angle QPR = \angle RPS = \frac{\theta}{2} \quad [\angle QPS = \theta \text{ என எடுத்துக் கொள்க}]$$

பிறகு முதல் திசைவேகத்தின் அளவை பாதியாகக் குறைக்கப்படுகிறது. குறைக்கப்பட்ட திசைவேகத்தை PT என்ற நேர்கோடு குறிக்கட்டும். எனவே $PTUS$ இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் PU, இப்போதுள்ள திசைவேகங்களின் விளைவு வேகத்தைக் குறிக்கும்.

$$\angle SPU = \frac{1}{2} \angle SPR$$

$$= \frac{\theta}{4}$$

மேலும் SR-ன் நடுப்புள்ளி 'U' ஆகும்.

$\angle SRP$-ன் சமவெட்டியாக PU உள்ளது.

எனவே $\frac{PR}{PS} = \frac{RU}{US}$

$= 1$

$\therefore \; PR = PS$

$= PQ$

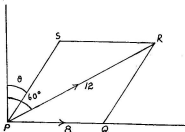
$= QR$

$\therefore$ PQR ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகும்

ஆகவே $\frac{\theta}{2} = 60°$

$\therefore \; \theta = 120°$

8. மணிக்கு 8 கி.மீ. வேகத்தில் சமதளத்தில் நடக்கும் ஒரு மனிதன், பெய்யும் மழை அவன் முகத்தின்மேல், மணிக்கு 12 கி.மீ. வேகத்தில் நிலைக்குத்துக்குரிய திசையிலிருந்து 60° கோணத்தில் விழுவதாக எண்ணுகிருன். மழையின் உண்மையான திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடி.



படம் 26.

மழையின் உண்மையான திசைவேகம் 'V' என்று கொள்ளு வோம். அதை PS என்ற கோடு குறிக்கட்டும். மனிதன் நடக்கும்

திசைக்கு எதிர்திசையில் வரையப்படும் திசைவேகம் 8 கி.மீ./மணியை PQ குறிக்கட்டும். $PQRS$ இணைகரத்தைப் பூர்த்திசெய்தால், மூலை விட்டம் PR இவைகளின் விளைவுவேகத்தைக் குறிக்கும். $\angle RPT = 60°$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\angle RPQ = 30° = PRS$$

எனவே $$\frac{PS}{\sin \angle PRS} = \frac{SR}{\sin \angle RPS} = \frac{RP}{\sin \angle PSR}$$

$$\frac{PS}{\sin 30°} = \frac{SR}{\sin (60-\theta)} = \frac{RP}{\sin (90+\theta)}$$

$$\frac{V}{\sin 30} = \frac{8}{\sin (60-\theta)} = \frac{12}{\cos \theta}$$

$$\therefore\ 8 \cos \theta = 12 [\sin 60 \cos \theta - \cos 60 \sin \theta]$$

$$= 6\ [\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta]$$

$$6 \sin \theta = [6\sqrt{3} - 8] \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{3\sqrt{3}-4}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{3\sqrt{3}-4}{3}\right]$$

$$V = \frac{12 \sin 30°}{\cos \theta}$$

$$= 12 \times \tfrac{1}{2} \times \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= 6 \sec \theta$$

9. ஒரு மோட்டார் வண்டி மணிக்கு 60 கி.மீ. வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. அதன் சக்கரங்களின் விட்டம் 2 மீ. உள்ளது. ஏதாவதொரு சக்கரத்தில் பூமிக்கு $1\frac{1}{2}$ மீ. உயரத்திலுள்ள இரு புள்ளி களின் திசைவேகங்களைக் கண்டுபிடி.

வட்டத்தின் மையப்புள்ளியை C என்றும், பூமியைச் சக்கரம் தொட்டுக்கொண்டிருக்கும் புள்ளியை A என்றும், சக்கரத்தின் மிக உயரத்திலுள்ள புள்ளியை B என்றும் குறிக்க.

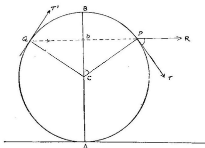
$$CD = \tfrac{1}{2} \text{ மீ.}$$

$$CP = 1 \text{ மீ.}$$

$$\cos \angle DCP = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore\ \angle DCP = 60°$$

எனவே $\angle RPT = 60°$



படம் 27.

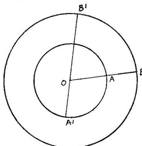
வண்டி ஓடும்போது, P-க்கு சுயமாக PR என்ற திசையில் 60 கி.மீ./மணி ஒரு வேகமும், C-ஐப் பொறுத்து PT திசையில் 60 கி.மீ./மணி ஒரு வேகமும் உள்ளன. எனவே விளைவு வேகம் 'V' $\angle RPT$ஐ சம பாகங்களாய்ப் பிரிக்கிறது. அதாவது கிடைதிசைக்குக் கீழே அதனுடன் 30° கோணம் உண்டாக்கும்.

$$V = \sqrt{60^2+60^2+2\times 60^2\times \cos 60^\circ}$$
$$= 60\sqrt{3}$$
$$= 60\times 1{\cdot}732$$
$$= 103{\cdot}92 \text{ கி.மீ./மணி.}$$

Qஐப் பொறுத்தவரை QP திசையில் 60 கி.மீ./மணி என்று ஒரு வேகமும், QT திசையில் 60 கி.மீ./மணி என்று ஒரு வேகமும் உள்ளன. ஆகவே கிடைதிசைக்கு மேலே அத்துடன் 30° கோணம் உண்டாக்கும் விளைவு வேகமும், 'V'-ன் மதிப்பு = 103·92 கி.மீ./மணி ஆகும்.

10. 2 செ.மீ., 3 செ.மீ. ஆரைகளைக்கொண்ட இரு மையவட்ட வளையங்களில் A, B என்ற இரு பாசிமணிகள் வலஞ்சுழியாகச் சுற்று கின்றன. ஒரு வளையத்தில் A-ன் திசைவேகம் 2 செ.மீ./விநாடியாக வும், மற்றொரு வளையத்தில் B-ன் திசைவேகம் 9 செ.மீ./விநாடியாகவும் உள்ளது. ஒரு கணத்தில் A-க்கும், B-க்கும் உள்ள தூரம் 1 செ.மீ. ஆகும். அந்தத் தூரம் 5 செ.மீ. ஆக இன்னும் எவ்வளவு நேரமாகும்?

வட்டங்களின் ஆரைகள் 2 செ.மீ., 3 செ.மீ. என்பதால் A-க்கும், B-க்கும் உள்ள தூரம் 1 செ.மீ. ஆக இருக்கும்போது A-யும், B-யும் 'O' பொது விட்டத்தின் ஒரே பக்கத்தில் இருக்கவேண்டும். தூரம்



படம் 28.

5 செ.மீ. ஆகும்போது பொது விட்டத்தில் மையப்புள்ளி 'O'-ன் வெவ்வேறு பக்கங்களில் இருக்கவேண்டும். B-ன் திசைவேகம் A-ன் திசைவேகத்தைவிட அதிகமாதலால் B, Aஐ விட $180°$ அதிகமாகச் சுற்றியாகவேண்டும்.

A-ன் கோணவேகம் $= \frac{2}{2}$

$= 1$ ஆரையன்/விநாடி

B-ன் கோணவேகம் $= \frac{9}{3}$ ஆரையன்/விநாடி

$= 3$ ஆரையன்கள்/விநாடி

A-யும் B-யும் 'O'ஐச் சுற்றி வருவதால் Aஐப் பொறுத்து B-யின் சார்கோண வேகம் $= 2$ ஆரையன்கள்/விநாடி

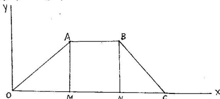
எனவே π ஆரையன்கள் அதிகமாகச் சுற்ற

$= \frac{\pi}{2}$ விநாடிகள்

$= 1{\cdot}578$ விநாடிகள் ஆகும்.

11. ஒரு இரயில் வண்டியின் வேகம் α என்ற மாறிலி வீதத்தில் 'O'-லிருந்து 'V'-க்கு அதிகரிக்கிறது. பிறகு கொஞ்ச நேரம் வேகம் மாறாமல் இருக்கிறது. கடைசியாக β என்ற மாறிலி வீதத்தில் 'O'-க்குக் குறைகிறது. இரயில் வண்டி சென்ற மொத்தத் தூரத்தை 'l' என்று

கொண்டால், அந்தத் தூரத்தைக் கடக்க வண்டி எடுத்துக்கொண்ட நேரத்தைக் கண்டுபிடி.



படம் 29.

$OABC$ திசைவேகம்—நேரம் வரைபடத்தை விளக்குவதாகக் கொள்வோம். OA மாறிலி முடுக்கத்துடன் இரயில் வண்டி நகரும் இயக்கத்தையும் குறிப்பதாகக் கொள்ளுவோம். மாறிலி திசைவேகத் துடன் வண்டி நகரும் இயக்கத்தை AB-யும், மாறிலி எதிர்முடுக்கத் துடன் செல்லும் இயக்கத்தை BC-யும் குறிப்பதாகக் கொள்ளுவோம்.

AM, BN என்ற நிலைத்தூரங்களை வரைக.

$AM = BN = V$

α = மாறிலி முடுக்கு

= OA-ன் சரிவு

$= \tan \angle MOA$

$= \frac{MA}{OM}$

$= \frac{V}{OM}$

எனவே $OM = \frac{V}{\alpha}$

β = மாறிலி எதிர்முடுக்கு

$= \tan N\hat{C}B$

$= \frac{NB}{NC}$

$= \frac{V}{NC}$

$\therefore NC = \frac{V}{\beta}$

$$l = \text{இரயில் வண்டி சென்ற மொத்தத் தூரம்}$$
$$= OABC \text{ என்ற சரிவகத்தின் பரப்பளவு}$$
$$= \tfrac{1}{2}(OC+AB)\,.\,AM$$
$$= \tfrac{1}{2}(OM+MN+NC+AB)\,.\,AM$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{V}{\alpha}+2AB+\frac{V}{\beta}\right]\cdot V$$
$$\frac{2l}{V}-\frac{V}{\alpha}-\frac{V}{\beta}=2AB.$$

ஆகவே வண்டி எடுத்துக்கொண்ட மொத்த

$$\text{நேரம்} = OC$$
$$= OM+MN+NC$$
$$= \frac{V}{\alpha}+\tfrac{1}{2}\left[\frac{2l}{V}-\frac{V}{\alpha}-\frac{V}{\beta}\right]+\frac{V}{\beta}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{2l}{V}+\frac{V}{\alpha}+\frac{V}{\beta}\right]$$
$$= \frac{l}{V}+\frac{V}{2}\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right]$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. ஒரு மனிதன் நேர் கிழக்காக 3 மீ. தூரம் சென்று பிறகு நேர் தெற்காக 4 கி.மீ. தூரம் நடக்கிறான். அவனுடைய இடப்பெயர்ச்சியைக் கண்டுபிடி.

2. நேர் தெற்காக, ஒரு கப்பல் $\sqrt{2}$ கி.மீ. தூரம் நகருகிறது. பிறகு தென்மேற்குத் திசையில் 3 கி.மீ. தூரம் செல்கிறது. தெற்கிலிருந்து மேற்காக $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ திசையில், 17 கி.மீ. இடப்பெயர்ச்சி உண்டாகிற தென்பதை நிரூபி.

3. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்துத் திசையிலுள்ள இரு திசை வேகங்கள் 12 செ.மீ./விநாடி, 5 செ.மீ/விநாடி என்றிருந்தால், அதன் விளைவு வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

4. 40 செ.மீ./விநாடி, 30 செ.மீ./விநாடி அளவுள்ள இரு திசை வேகங்களின் திசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 30° என்றால் விளைவு வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

5. 25 கி.மீ./மணி வேகங்களுள்ள இரு திசைவேகங்களுக் கிடையேயுள்ள கோணம் 60° என்றால் விளைவு வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

6. 'U', 'V' திசைவேகங்களின் விளைவு வேகம் 'W' என்றால், 'W' திசைவேகம் இரட்டிக்கும்போது, விளைவு வேகம், 'V' திசை வேகத்துக்குச் செங்குத்தாக உள்ளதென்று நிரூபி.

7. ஒரு புள்ளி கொண்டிருக்கும் திசைவேகங்களை ஒரு வட்டத்தில் மேலுள்ள புள்ளியையும் ஏதாவதொரு விட்டத்தின் நுனிகளையும் சேர்க்கும் நேர்கோடுகள் விளக்கினால் அவைகளின் விளைவு வேகம் வட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் விட்டம் குறிக்கிற தென்பதைக் காண்பி.

8. 5 கி.மீ./மணி திசைவேகத்தில் வடகிழக்குத் திசையில் ஒரு மனிதன் நடக்கிறான். நேர் வடக்கு நேர் கிழக்குத் திசைகளில் அவன் திசைவேகத்தின் கூறுகளைக் கண்டுபிடி.

9. 15 செ.மீ./விநாடி திசைவேகத்தில் ஒரு புள்ளி ஒரு நேர் கோட்டில் நகருகிறது. அந்தக் கோட்டிற்கு 30° கோணத்திலுள்ள திசையில், திசைவேகத்தின் கூற்றைக் கண்டுபிடி.

10. 150 செ.மீ./விநாடி உள்ள திசைவேகத்தை, இரண்டிற்கும் இடையே 60° கோணமுள்ள இரு சம திசைவேகங்களாகப் பிரிக்கவும்.

11. ஒரு புள்ளி 4, 3, 2, 1 அளவுள்ள திசைவேகங்களை ஒரே சமயத்தில் கொண்டிருக்கிறது. ஒன்றுக்கும் இரண்டுக்கும் இடையே யுள்ள கோணம் 30°, இரண்டிற்கும் மூன்றுக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் 120° என்றால் அவைகளின் விளைவு வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

12. விநாடிக்கு 12, 15, 22 செ.மீ. வேகங்களை ஒரே சமயத்தில் கொண்ட ஒரு புள்ளி அசையாமலிருக்கிறது. 12, 15 செ.மீ. திசை வேகங்களின் திசைக்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

13. 300 மீ. அகலமுள்ள ஓர் ஆற்றில் தண்ணீர் மணிக்கு 3 கி.மீ. வேகத்தில் ஓடுகிறது. மணிக்கு 8 கி.மீ. வேகத்தில், ஒரு படகு ஆற்றின் நேர் குறுக்கே செலுத்தப்படுகிறது ; எதிர்க் கரையை அடையும்போது படகு எவ்வளவு தூரம் ஆற்றில் சென்றிருக்கும் ?

14. நீரோடையில் ஓட்டமில்லாமலிருந்தால் 300 மீ. அகலமுள்ள ஓடையை 5 நிமிடங்களில் ஒரு மனிதன் நீந்திக் கடப்பான். ஓட்ட மிருக்கும்போது கடப்பதற்கு 6 நிமிடங்கள் பிடிக்கும். ஓடையில் நீரின் வேகம் என்ன ?

15. ஒரு புள்ளிக்கு இருதிசைகளில் சம திசைவேகங்கள் உள்ளன. ஒரு திசைவேகத்தின் அளவை பாதியாகக் குறைக்கப்படுகிறது. விளைவு வேகம் மற்றத் திசைவேகத்துடன் உண்டாக்கும் கோணம் பாதியாக்கப் படுகிறது. இரண்டு திசைவேகங்களுக் கிடையேயுள்ள கோணம் 120° எனக் காண்பி.

16. மணிக்கு 12 கி.மீ. வேகத்தில் மிதிவண்டி விடும் ஒரு பையன் எந்தத் திசையில் விநாடிக்கு 8 மீட்டர் வேகத்தில் ஒரு கல்லை எறிந்தால், விளைவு இயக்கம் மிதிவண்டி ஓடும் திசைக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

17. மணிக்கு 15 கி.மீ. வேகத்தில் ஒரு கப்பல் நேர் கிழக்குத் திசையில் செல்லுகிறது. அதே நேரத்தில் மற்றொரு கப்பல் மணிக்கு 20 கி.மீ. வேகத்தில் நேர் வடக்குத் திசையில் செல்லுகிறது. முதல் கப்பலைச் சார்ந்து இரண்டாவது கப்பலின் சார்வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

18. மணிக்கு 40, 50 கி.மீ. வேகங்களில் இரு இரயில் வண்டிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரயில் பாதையின்மேல் ஓடுகின்றன. இரண்டாவது வண்டியைப் பொறுத்து முதல் வண்டியின் சார்வேகம் என்ன?

19. ஒரு துரித வண்டியில் சன்னல் பக்கம் உட்கார்ந்திருக்கும் ஒரு பிரயாணி, காற்று வண்டிக்கு நேர் எதிராக 16 கி.மீ./மணி வேகத்தில் அடிப்பதாக எண்ணுகிறான். துரித வண்டி 24 கி.மீ./மணி வேகத்தில் அப்போது சென்றுகொண்டிருந்தால் காற்றின் உண்மையான திசை வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

20. நேர் மேற்காகச் செல்லும் ஒரு பாதையில் மணிக்கு 5 கி.மீ. வேகத்தில் நடக்கும் ஒரு மனிதன், காற்று தெற்குத் திசையிலிருந்து வீசுவதாக எண்ணுகிறான். அதே பாதையில் அதே திசையில் 10 கி.மீ./மணி வேகத்தில் மிதிவண்டி விடும் மற்றொரு மனிதன் காற்றுத் தென்மேற்கு திசையிலிருந்து வீசுவதாக எண்ணுகிறான். அப்படி யானல் காற்றின் உண்மையான திசைவேகம் என்ன?

21. P என்ற இடத்தில் இரு சாலைகள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாகச் சந்திக்கின்றன. ஒரு சாலையில் மணிக்கு 3 கி.மீ. வேகத்தில் நடக்கும் ஒரு மனிதன் A, P-யிலிருந்து 100 கி.மீ. தூர மிருக்கும்போது மற்றொரு சாலையில் மணிக்கு 4 கி.மீ. வேகத்தில் நடக்கும் மற்றொரு மனிதன் Bஐப் பார்க்கின்றான். Bஐச் சார்ந்து, A-ன் சார்வேகம் என்ன? A இன்னும் எவ்வளவு தூரம் நடந்தால் B-க்கு வெகு சமீபத்திலிருப்பான்?

22. 60° கோணத்தில் இரு சாலைகள் A என்ற இடத்தில் சந்திக்கின்றன. அந்த இரு சாலைகளிலும் முறையே 20 கி.மீ. 30 கி.மீ. வேகத்தில் செல்லும் மோட்டார் வண்டிகள் Aஐ நோக்கிச் சென்று கொண்டிருக்கின்றன. இரு வண்டிகளும் A-யிலிருந்து முறையே 350, 200 மீட்டர் தூரத்திலுள்ளபோது அவைகளின் சார்வேகங்களைக் கண்டுபிடி. அவை வெகு சமீபத்திலிருக்கும்போது A-யிலிருந்து அவைகளின் தூரங்களைக் கண்டுபிடி.

23. வடகிழக்குத் திசையில் பிரயாணம் செய்யும் ஒரு மனிதன், காற்று நேர் வடக்குத் திசையிலிருந்து அடிப்பதாக எண்ணுகிறான். வேகத்தை இரட்டிக்கும்போது காற்று வடக்குக்கு $\cot^{-1} 2$ கோணத்தில் கிழக்குத் திசையிலிருந்து அடிப்பதாக அவனுக்குத் தோன்றுகிறது. காற்று அடிக்கும் உண்மையான திசை நேர் கிழக்கு நோக்கி எனக் காண்பி.

24. மணிக்கு 10 கி.மீ. வேகத்தில் நேர் கிழக்குத் திசையில் மிதிவண்டி விடும் ஒரு மனிதன் காற்று வடகிழக்குத் திசையிலிருந்து அடிப்பதாக எண்ணுகிறான். அவனே வடகிழக்குத் திசையில் செல்லும் போது, காற்று நேர் வடக்குத் திசையிலிருந்து வருவதாகத் தோன்று கிறது. காற்றின் உண்மையான திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடி.

25. ஒன்றைச் சார்ந்து மற்றதன் சார்வேகத்தைக்கொண்டு இரு நகரும் புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள வெகு குறுகிய தூரத்தை எப்படிக் கண்டுபிடிப்பதென விளக்கு.

26. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரு கப்பல் மற்றொரு கப்பலி லிருந்து நேர் மேற்குத் திசையில் 20 கி.மீ. தூரத்திலுள்ளது. முதல் கப்பல் மணிக்கு 20 கி.மீ. வேகத்தில் வடகிழக்குத் திசையில் நகருகிறது. மற்றது மணிக்கு 16 கி.மீ. வேகத்தில் கிழக்குத் திசையில் நகருகிறது. அவைகளிடையேயுள்ள குறைந்த தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

27. நேர் வடக்குத் திசையில் 'a' கி.மீ. தூரத்தில் 'B' கப்பலை, A கப்பலிலுள்ள ஒருவன் பார்க்கிறான். 'V' கி.மீ./மணி வேகத்தில் நேர் தெற்குத் திசையில் 'B' கப்பல் நகருகிறது. கிழக்குக்கு 30° வடக்குத் திசையில் A கப்பல் '$2V$' கி.மீ./மணி வேகத்தில் நகருகிறது. B கப்பலைப் பார்த்த நேரத்திலிருந்து $\frac{2a}{7V}$ மணி நேரம் கழித்து, A-யும், B-யும் வெகு சமீபமாக இருக்குமென நிரூபி.

28. ஒரு நேர் சாலையில் மணிக்கு 15 கி.மீ. வேகத்தில் ஒரு மோட்டார் வண்டி ஓடிக்கொண்டிருக்கிறது. அந்தச் சாலைக்குச் செங்குத்தாக உள்ள மற்றொரு சாலையில் மணிக்கு 6 கி.மீ. வேகத்தில் ஒரு மனிதன் இரண்டு சாலைகள் சந்திக்கும் இடத்தை நோக்கி நடக்கிறான். அவன் மோட்டார் வண்டியைப் பார்க்கும்போது வண்டி சந்திப்பிலிருந்து 200 மீ. தூரத்திலும், மனிதன் 100 மீ. தூரத்திலும் இருக்கிறார்கள். மனிதன் தன் வேகத்தை எவ்வளவு அதிகரித்தால் சந்திப்பில் மோட்டார் வண்டியைப் பிடிக்க முடியும்?

29. ஒரு இரயில் வண்டி மணிக்கு 48 கி.மீ. வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. அதன் சக்கரத்தின் விட்டம் 1 மீ. ஆகும். சக்கரம்

நழுவவில்லை என்று கொண்டு அதன் கோணவேகத்தைக் கண்டுபிடி. மேலும் சக்கரத்தின் மையத்தைப்பொறுத்து அதன் மிக உயரமான புள்ளியின் திசைவேகமென்ன ?

30. மணிக்கு 96 கி.மீ. வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் ஓர் இரயில் வண்டியின் முன்சக்கரத்தின் விட்டம் 4 மீ. தரைக்கு 3 மீ. உயரத்தில் சக்கரத்தின் மேலுள்ள இரு புள்ளிகளின் திசைவேகங்களைக் கண்டுபிடி.

31. சமதளத்தில் நழுவாமல் ஒரு சக்கரம் ஒரே சீராகச் சுழல்கிறது. அதன் மையம் ஒரு நேர்கோட்டில் நகருகிறது. சக்கரத்தின் மிக உயரமான புள்ளியின் திசைவேகம் தரைக்கு ஆரையின் பாதி உயரத்தி லுள்ள புள்ளியின் திசைவேகத்தைப்போல் இரு பங்கென நிரூபி.

32. இரு நிலையான புள்ளிகளைப் பொறுத்து P என்ற புள்ளியின் திசைக் கோணங்கள் சமமென்றால் P-யின் நியமப்பாதை ஒரு வட்ட மெனக் காண்பி.

33. 'a' ஆரையாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தை ஒரே சுழியாக இரு துகள்கள் 'u' என்ற ஒரே திசைவேகத்துடன் சுற்றுகின்றன. ஒன்றைப் பொறுத்து மற்றதன் திசைக் கோணம் $\frac{u}{a}$ என்று காண்பி.

34. முறையே 'm' 'n' என்ற திசைவேகங்களைக் கொண்டு இரு புள்ளிகள் '$3a$', '$5a$' என்ற ஆரைகளைக் கொண்ட இரு, ஒரு மையப் புள்ளி வட்டங்களை உண்டாக்குகின்றன. அவைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் '$4a$' ஆக இருக்கும்போது, அவைகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டின் திசைக் கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

35. 'a', 'b' ஆரைகளையுடைய இரு, ஒரு மையப்புள்ளி வட்டங் களை உண்டாக்கும் இரு புள்ளிகள், ஆரைகளுக்கு எதிர் மாறான விதத்தில் திசைவேகங்களைக் கொண்டிருக்கிறது. புள்ளிகளுக்கிடையே யுள்ள சார்வேகம் அவைகளைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்கு இணையாயுள்ள போது, அந்தப் புள்ளிகளில் வரையப்படும் ஆரைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் $\cos^{-1}\frac{2ab}{a^2+b^2}$ எனக் காண்பி.

36. ஒரு துகள் ஒரே சீரான திசைவேகத்துடன் ஒரு நேர் கோட்டில் நகருகிறது. ஒரு நிலையான புள்ளியைப் பொறுத்து, அதன் திசைக் கோணம் அந்தப் புள்ளியிலிருந்து துகளின் தூரத்தின் வர்க்கத்துக்கு எதிர் மாறெனக் காண்பி.

37. '$2r$' 'r' ஆரைகளையுடைய இரு ஒரு மையப்புள்ளி வட்டங்களை உண்டாக்கும் A, B இரு புள்ளிகள் முறையே 'V', '$2V$' என்ற திசைவேகங்களுடன் வட்டத்தில் ஒரே திசையில் நகர்ந்தால் $\cot \alpha = 2$ [சார் இயக்கம் AB திசையில் இருக்கும்போது $\angle OAB = \alpha$ என்றால்] என்று நிரூபி.

38. A, B என்ற இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் நீளம் α. A, B இவைகளின் திசைவேகங்கள் AB-யுடன் முறையே α, β என்ற கோணங்களை உண்டாக்கினால் AB-ன் திசைக்கோணம் $\dfrac{V \sin(\alpha - \beta)}{d \cos \beta}$ [$V = A$-ன் திசைவேகம்] என்று காண்பி.

39. O என்ற புள்ளியை மையமாகவும் r, $2r$ என்பவைகளை ஆரைகளாகக் கொண்ட இரு ஒரு மையப்புள்ளி வட்டங்களை உண்டாக்கும் இரு துகள்கள் ஒரே சீரான சம திசைவேகங்கள் 'V'-யுடன் நகருகின்றன. முதலில், துகள்கள் O-ன் ஒரே பக்கத்தில் OAB விட்டமாகக் கொண்ட A, B என்ற புள்ளிகளில் தொடங்கி ஒரே திசையில் செல்கின்றன. சிறிய வட்டத்தை உண்டாக்கும் துகள் அதன் வட்டத்தின் சுற்றளவில் மூன்றில் ஒரு பங்கு தூரம் சென்றிருக்கும் போது, அவைகளின் சார்வேகம் 'V' என்றும், OAB-க்குச் செங்குத்தாக உள்ளதென்றும் காண்பி.

40. 'V', 'V'' என்ற திசைவேகங்களுடன் இரு துகள்கள் 'a', 'a'' என்ற ஆரைகளையுடைய இரு ஒரு மையப்புள்ளி வட்டங்களில் சுற்றுகிறது. அவைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 'r' ஆக இருக்கும்போது, அவைகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் திசைக்கோணம்

$$\frac{1}{2r^2}\left[(r^2+a^2-a'^2)\,V+(r^2+a'^2-a^2)\,V'\right]$$ எனக் காண்பி.

3. நேர்கோட்டியக்கம்

(Rectilinear Motion)

1. ஒரே சீரான முடுக்கத்துடன் நேர்கோட்டில் இயக்கம்

துகள் ஒரே சீரான முடுக்கத்துடன் ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்கும் போது, வேகமும், திசைவேகமும் ஒன்றேயாகும். திசைவேகம் அதிகரித்துக்கொண்டேயிருந்தால் முடுக்கம் '+' குறியுடையது. குறையும்போது முடுக்கம் '−' குறியுடையது.

இந்த நேர்கோட்டியக்கத்திற்குரிய மூன்று அடிப்படைச் சமன்பாடுகளை இப்பொழுது கண்டுபிடிப்போம்.

2. தேற்றம்

'u' திசைவேகத்துடன், ஆரம்பிக்கும் ஒரு புள்ளி நேர்கோட்டில் இயங்குகிறது. அது இயங்கும் திசையில் 'f' என்ற மாறிலி முடுக்கம் உள்ளது. 't' நேரம் கழித்து திசைவேகம் 'v' என்றும், ஆரம்பப் புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரம் 's' என்றும் கொண்டால்,

(1) $v = u+ft$

(2) $s = ut+\frac{1}{2}ft^2$

(3) $v^2 = u^2+2fs$ என்று நிரூபிக்க.

(1) 'f' என்பது மாறிலி முடுக்கத்தைக் குறிப்பதால், $f=$அலகு நேரத்தில் உண்டாகும் திசைவேகத்தின் மாறுதல். எனவே 't' நேரத்தில் திசைவேகத்தில் உண்டாகும் மாறுதல் 'ft' ஆகும். ஆரம்பத் திசைவேகம் 'u' ஆதலால், 't' நேரம் கழித்துத் திசைவேகம் $v=u+ft$ ஆகும்.

(2) முடுக்கம் ஒரே சீராக உள்ளதால், திசைவேகம் ஒரு மாறிலி விகிதத்தில் அதிகரிக்கின்றது. எனவே, 'O'-விலிருந்து 't' வரையுள்ள இடைவெளி நேரத்திலுள்ள சராசரி திசைவேகம், ஆரம்ப முடிவு திசைவேகங்களுக்கிடையேயுள்ள சராசரிக்குச் சமமாகும்.

$\therefore$ 't' இடைவெளி நேரத்தில் சராசரி வேகம் $= \frac{1}{2}(u+v)$

துகள் இயங்கும் தூரம் $= \frac{1}{2}(u+v)t$

$$= \tfrac{1}{2}(u+v+ft) \cdot t$$
$$= ut + \tfrac{1}{2}ft^2$$
$$\therefore s = ut + \tfrac{1}{2}ft^2$$

(3) $v = u + ft$ என்பதால்

$$v^2 = u^2 + 2uft + f^2t^2$$
$$= u^2 + 2f\,[ut + \tfrac{1}{2}ft^2]$$
$$= u^2 + 2fs.$$

முறை II: மேற்கண்ட மூன்று சமன்பாடுகளையும் வகை கணித முறையில் நிர்ணயிக்கலாம்.

't' நேரத்தில் துகளுக்கு ஏற்படும் திசைவேகம், முடுக்கம் இவைகளை $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d^2s}{dt^2}$ என்பவைகளால் குறிக்கலாம்.

$$\therefore f = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ ஆகும்.}$$

தொகை காண்கில் (By **integration**),

$$\frac{ds}{dt} = ft + A \text{ என்றாகும்.}$$

$t = 0$ என்னும்போது $\frac{ds}{dt} = u$ ஆகும்.

$$u = A$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = ft + u \qquad \ldots\ldots(A)$$

அதாவது $v = u + ft$ ......(1)

(A)ஐ தொகை காண்கில்

$$s = \tfrac{1}{2}ft^2 + ut + B$$

$t = 0$ என்றால் $s = 0$ ஆகும்.

எனவே $B = 0$

$$\therefore s = ut + \tfrac{1}{2}ft^2 \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$f = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\text{அல்லது} = \frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$= \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$= v\cdot\frac{dv}{ds}$$

$$v\,.\,dv = f\,.\,ds$$

இதைத் தொகை காண்கில்

$$\frac{v^2}{2} = fs + C$$

$t = 0$ என்னும்போது $s = 0 \quad v = u$ ஆகும்.

$$\frac{u^2}{2} = 0 + C$$

$$\therefore\ \frac{v^2}{2} = fs + \frac{u^2}{2}$$

அல்லது $v^2 = u^2 + 2fs$ ஆகும். ......(3)

கிளைத்தேற்றம் 1 : துகள் ஓய்விலிருந்து இயங்கும்போது $u = 0$ ஆகும். எனவே இயக்கச் சமன்பாடுகள் மூன்றையும்,

$v = ft$

$s = \frac{1}{2}ft^2$

$v^2 = 2fs$ என்று கொள்ளலாம்.

2. துகள் ஒரு வளைவரை பாதையில் (Curvilinear path) இயங்கும்போது, அது இயங்கும் திசைபாதையின் தொடுகோட்டிலேயே இருக்கும். திசைவேகம் 'u'-வுடன் ஆரம்பித்து 'f' என்ற சீரான முடுக்கத்துடன் துகள் இயங்கும்போது, மேற்கண்ட மூன்று அடிப்படை இயக்கச் சமன்பாடுகள் வளைவரை பாதைக்கும் பொருந்தும்.

3. தேற்றம்

குறிப்பிட்ட ஒரு விநாடி நேரத்தில் துகள் இயங்கும் தூரத்தைக் கண்டுபிடிக்க,

't' யாவது விநாடியில் துகள் இயங்கும் தூரம்

= 't' விநாடிகளில் துகள் இயங்கும் தூரம்—$(t-1)$ விநாடிகளில் துகள் இயங்கும் தூரம்

$$= [ut+\tfrac{1}{2}ft^2]-[u(t-1)+\tfrac{1}{2}f(t-1)^2]$$
$$= u+\tfrac{1}{2}f[t^2-(t-1)^2]$$
$$= u+\tfrac{1}{2}f(2t-1)$$

4. விழும் பொருள்களின் இயக்கம் (Motion of Falling Bodies)

கனமான பொருள் எதுவும் பூமியை நோக்கி விழும்போது, அதன் வேகம் அதிகரித்துக்கொண்டே போகும். அதாவது பொருள் முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறது. இந்த முடுக்கம் பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியால் ஏற்படுகிறது. எனவே இந்த முடுக்கத்தைப் பூமியின் ஈர்ப்பு எனலாம்.

பல சோதனைகளின்படி, காற்றின் தடுக்கும் தன்மையைத் தவிர்த்து நோக்கினால், இந்த முடுக்கம் ஒரு மாறிலியாக இருக்கும். இது கீழ்முக நிலைதிசையில் அமையும். இதை 'g' என்ற எழுத்தால் குறிக்கலாம்.

ஓர் இடத்தில் 'g'-ன் மதிப்பு மாறாதிருக்கும். பொருளின் பருமன் எடை, அதன் இரசாயனச் சேர்க்கை இவை 'g'-ன் மதிப்பைப் பாதிக்காது. ஆனால் கடல் மட்டத்துக்கு மேலேயுள்ள உயரத்தையும், பூமியின் மத்திய கோட்டிலிருந்து உள்ள தூரத்தையும் பொறுத்து 'g'-ன் மதிப்பு மாறும்.

F.P.S. முறையில் 'g'-ன் மதிப்பை 32 அடிகள்/விநாடி^{2} என்றும், C.G.S. முறையில் 981 செ. மீ./விநாடி^{2} என்றும் கொள்வது மரபு.

5. பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் உண்டாகும் நிலை இயக்கம் (Vertical Motion due to Gravity)

ஒரு பொருள் 'u' என்ற ஆரம்பத் திசைவேகத்துடன் நேராகச் செலுத்தப்படுவதாகக் கொள்வோம். பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் உண்டாக்கும் முடுக்கமான 'g' இந்தத் திசைக்கு எதிர்திசையாக இயங்குவதால், அதை '$-g$' எனக் குறிப்பிடலாம். எனவே பொருள் மேலே செல்லச் செல்ல, திசைவேகம் குறைகிறது. கடைசியாக அது '0' அல்லது பூச்சியமாகிறது. அப்பொழுது ஒரு நொடி நேரத்துக்கு ஓய்விலிருக்கிறது. ஆனால் உடனே கீழ்முகத் திசையில் திசைவேகம் உண்டாக்கப்பட்டுப் பொருள் கீழ்நோக்கி விழுகிறது.

எனவே மேல் நோக்க இயக்கத்திற்குரிய சமன்பாடுகள்,

$$v = u-gt$$
$$s = ut-\tfrac{1}{2}gt^2$$
$$v^2 = u^2-2gs \text{ ஆகும்.}$$

மிக உயரமான புள்ளியில் $v=0$ என்பதால்

$$u-gt = 0$$
$$t = \frac{u}{g} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே மிக உயரமான புள்ளியை அடையப் பொருள் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் $\frac{u}{g}$ ஆகும்.

மிக உயரமான தூரம்

$o = u^2 - 2gs$-லிருந்து

$s = \frac{u^2}{2g}$ ஆகும்.

மேலும், 't' நேரம் கழித்துப் பொருள் "h" உயரமடைந்தால்

$$h = ut - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$\therefore gt^2 - 2ut + 2h = 0$ இது 't'-ல் ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகும். இதன் மூலங்கள் t_1, t_2 என்ற இரண்டும் மிகையாகவேயுள்ளது. ஏனெனில் $t_1 + t_2 = \frac{2u}{g}$; $t_1 \times t_2 = \frac{2h}{g}$.

இந்த இரு மிகையான மதிப்புகளில் குறைந்த மதிப்புள்ள t_1 பொருள் மேலே செல்லும்போது 'h' தூரத்தை எட்ட எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம். அது இன்னும் மேலே சென்று திரும்ப வந்து 'h' தூரத்தை அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் 't_2' எனலாம்.

பொருள் வீச்சு, புள்ளியிலிருந்து 'h' உயரவிருக்கும்போது, அதன் திசைவேகம்

$v^2 = u^2 - 2gh$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படும்.

எனவே $v = \pm\sqrt{u^2 - 2gh}$ ஆகிறது.

பொருள் மேலே சென்று 'h' உயரம் அடையும்போது $v = +\sqrt{u^2 - 2gh}$ ஆகவும், அது மேலும் சென்று திரும்பிவந்து 'h' உயரம் அடையும்போது $v = -\sqrt{u^2 - 2gh}$ ஆகவும் இருக்குமென்பது தெளிவு.

5·1. தடையின்றிக் கீழே விழும் பொருள்கள் (Freely Falling Bodies)

கீழ்முகத் திசையை மிகையாகக் கொண்டால் ஆரம்பத் திசைவேகம் $u = 0$ ஆகும். 'g' மிகை குறியையே கொண்டிருக்கும். 'h' உயரத்திலிருந்து பொருள் விழுமானால் இயக்கச் சமன்பாடுகள்,

$$v = gt$$
$$h = \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$v^2 = 2gh$$
$$v = \sqrt{2gh}$$



இதை 'h' உயரம் தங்குதடையின்றிப் பொருள் விழும்போது ஏற்படும் திசைவேகம் எனலாம்.

6. உராய்வற்ற சாய்தளத்தில் (Smooth Inclined Plane) துகளின் இயக்கம்

படம் 30.

கிடைதிசைக்கு 'α' கோணத்தில் சரிந்துள்ள உராய்வற்ற சாய்தளத்தின் நிலை வெட்டுமுகம் ABC எனக் கொள்க.

P என்பது அதன்மேல் உள்ள ஒரு துகளாகக் கொள்க.

துகளின் இயக்கத்தைத் தடுத்து நிறுத்த இந்தச் சாய்தளம் இல்லா விட்டால், துகள் நேர் நிலை திசையில் 'g' முடுக்கத்தால் உந்தப்பட்டுக் கீழே விழும்.

நிலைதிசையிலுள்ள முடுக்கம் 'g'ஐ AB-க்குச் செங்குத்துத் திசையான PR திசையில் $g\cos\alpha$ என்ற கூருகவும் PB திசையில் $g\sin\alpha$ என்ற கூருகவும் பிரிக்கலாம்.

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் துகளுக்கு இயக்கம் இல்லை. எனவே துகள் $g\sin\alpha$ என்ற முடுக்கத்துடன் சாய்தளத்தில் நழுவுகிறது. நழுவும் தூரம் 'l' என்று கொண்டால் l தூரம் நழுவிய வுடன் அதன் திசைவேகம்.

$$v^2 = 2g\sin\alpha \,.\, l$$

$$v = \sqrt{2g\sin\alpha \,.\, l}$$

$$= \sqrt{2g \,.\, PN}.$$

$= \sqrt{\text{[}P\text{-யின் நிலைதூரத்துக்கு ஒத்த உயரத்தில் துகள் தடையின்றி விழும்போது ஏற்படும் திசைவேகமாகும்]}}$

ஆனல் 'l' தூரம் நழுவ எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் துகள்,

PN உயரம் விழத் எடுக்கும் நேரத்துக்குச் சமமாகாது.

$$l = 0+\frac{1}{2}\, g \sin \alpha\, t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}}$$

ஆனல் PN தூரம் விழத் துகள் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்,

$$PN = 0+\frac{1}{2}\, gt^2$$

$$T = \frac{2PN}{g}$$

$$= \frac{2l \sin \alpha}{g}$$

$$\neq t$$

இதற்கு மாறாக, துகள் 'u' என்னும் ஆரம்பத் திசைவேகம் கொண்டு சாய்தளத்தின்மேல் எறியப்பட்டால், $f-g \sin \alpha$ என்று கொண்டு அதன் இயக்கத்தைக் கவனிக்கலாம்.

$$v = u-g \sin \alpha \,.\, t$$

$$s = ut-\frac{1}{2}\, g \sin \alpha \,.\, t^2$$

$$v^2 = u^2-2g \sin \alpha \,.\, l$$

'u' என்னும் ஆரம்ப வேகத்துடன் அனுப்பப்படும் துகள் அடையும் மிக அதிகபட்ச தூரம்

$$0 = u^2-2g \sin \alpha \,.\, l$$

$$l = \frac{u^2}{2g \sin \alpha}$$

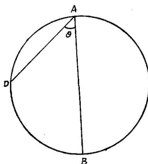
அதற்குரிய நேரம்

$$t = \frac{u}{g \sin \alpha} \text{ ஆகும்.}$$

7. தேற்றம்

நிலைதிசையில் உள்ள ஒரு வட்டத்தின் மிக உயரமான புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் உராய்வற்ற நாண்களின் வழியே நழுவும் பொருள் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரங்கள் சமமே.

நிலைதிசையிலுள்ள வட்டத்தின் மிக உயரமான புள்ளி A என்று கொள்க. அதன் வழியாக வரையப்படும் விட்டம் AB எனும் நாண் AD என்றும் கொள்க.



படம் 31.

$\angle DAB = \theta$ என்றும், $AD = l$ என்றும் கொள்க.

$l = 2a \cos\theta \quad [a =$ வட்டத்தின் ஆரம்$]$

AD திசையில் முடுக்கத்தின் கூறு $g \cos\theta$ ஆகும்.

ஓய்விலிருந்து தொடங்கி $g \cos\theta$ முடுக்கத்துக்குக் கட்டுப்பட்டு, AD தூரம் துகள் இயங்க எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்

$$l = \tfrac{1}{2} g \cos\theta \, T^2.$$

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g \cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{2.2a \cos\theta}{g \cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{4a}{g}}$$

T-யின் மதிப்பு 'θ'-வைச் சாரவில்லை யாதலால் அது AB நிலை தூரம் துகள் தடையின்றி இயக்க எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்துக்குச் சமம்.

குறிப்பு : மிகக் குறைவான உயரத்திலுள்ள புள்ளியான B-ன் வழியாக வரையப்படும் நாண்களின் வழியே நழுவும் துகள்கள் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரமும் சமமென்பது தெளிவு.

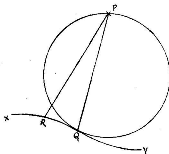
8. மிக விரைவாக இறங்குதற்குரிய நேர்கோடுகள் (Lines of quickest descent)

P என்ற புள்ளி கொடுத்திருப்பதாகக் கொள்ளுவோம். அதன் வழியாகச் செல்லும் நிலைதளத்தில் XY என்ற வளைவரை இருப்பதாகவும் P-யிலிருந்து தொடங்கும் ஒரு துகள் ஒரு நேர்கோட்டில் நழுவி XYஐ அடைவதானால் அது அப்படி நழுவுவதற்குரிய நேரத்தைக் கண்டுபிடிக்க மிகக் குறைந்த நேரத்துக்குரிய நேர்கோட்டை மிக விரைவாக இறங்குதற்குரிய நேர்கோடு எனலாம்.

குறிப்பு : இப்படிப்பட்ட நேர்கோடு P-க்கும் XY-க்கும் இடையே உள்ள மிகக் குறைந்த தூரமாக இருக்க வேண்டுவதில்லை.

8·1. தேற்றம்

P-யிலிருந்து அதன் வழியாக வரையப்படும் நிலைதளத்திலுள்ள வளைவரைக்கு மிக விரைவாக இறங்குவதற்குரிய நேர்கோடு PQ என்றால், Q என்பது Pஐ மிக உயரமாக வைத்து வரையப்படும் வட்டம் வளைவரையைத் தொடும் புள்ளியாகும்.



படம் 32.

XY என்பதை வளைவரையாகவும் அதன் நிலைதிசையில் P என்ற புள்ளி இருப்பதாகக் கொள்வோம். Pஐ மிக உயரமாகக் கொண்டு XYஐ வெளியே தொடும்படியாக ஒரு வட்டம் வரைக. அது XYஐ Q-வில் தொடட்டும். XY-ல் R என்பது வேறு ஏதாவதொரு புள்ளி ஆகட்டும். Pஐயும் Rஐயும் சேர்க்கும் நேர்கோடு வட்டத்தை மீண்டும் ‘ L ’ என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும்.

$\therefore\ PR > PL$

$\therefore\ PR$-ன் வழியாகத் துகள் நழுவ எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்

$>$ PL-ன் வழியாகத் துகள் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்

ஆனால் PL-ன் வழியாகத் துகள் நழுவ எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் $= PQ$-வின் வழியாக எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்.

PR-ன் வழியாக நழுவ நேரம் $>$ PQ-வின் வழியாக நழுவ நேரம்.

R என்பது XY-ன் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி ஆதலால்,

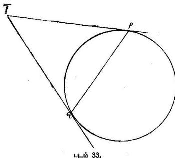
PQ-வின் வழி நழுவ நேரம் $<$ P-ன் வழியாக வளைவரைக்கு வரையப்படும் நேர்கோட்டின் வழியாக நழுவ வேண்டிய நேரம்.

$\therefore\ PQ$ மிக விரைவாக இறங்குதற்குரிய நேர்கோடாகும்.

குறிப்பு : இதேபோல், P-லிருந்து அதே நிலை சமதளத்திலிருந்து வளைவரைக்கு மிக விரைவாக ஏறுவதற்குரிய நேர்கோடு PQ என்றால் Q என்பது P-ன் மிகக் குறைவான உயரத்தில் வைத்து வரையப்படும் வட்டம் வளைவரை தொடும் புள்ளியாகும்.

8·2. கிளைத்தேற்றம்

P-லிருந்து அதே நிலைதளத்திலுள்ள XY என்ற நேர்கோட்டிற்கு மிக விரைவாக இறங்குவதற்குரிய நேர்கோட்டைக் கண்டுபிடிக்க.



படம் 33.

P-யில் வட்டத்துக்கு PT என்ற தொடுகோடு வரைக. PQ நிலை திசையில் உள்ளதாலும், P வட்டத்தின் மிக உயரமான புள்ளியாதலாலும், PT கிடைதிசையில் இருக்கும். இந்தக் கோடு XYஐ T-ல் சந்திக்கட்டும். XY-ல் T-க்குக் கீழே $TQ = TP$ என்றபடி Qஐக் கண்டுபிடித்தால் TQ என்பது நமக்கு வேண்டிய கோடாகும்.

8·3. கிளைத்தேற்றம் 2

P-லிருந்து அதே நிலை தளத்திலுள்ள ஒரு வட்டத்துக்கு வரையப்படும் மிக விரைவாக இறங்குவதற்குரிய நேர் கோட்டைக் கண்டுபிடிக்க.

P-ன் நிலைதளத்திலுள்ள வட்டத்தின் மையப் புள்ளி O என்றும், அதன் மேல் மிகக் குறைவாக உயரத்திலுள்ள புள்ளி R என்றும் கொள்க.

Pஐயும் Rஐயும் சேர்க்க. இது வட்டத்தை Q என்ற புள்ளியில் வெட்டினால் PQ என்பது மிக விரைவாக இறங்குவதற்குரிய நேர்கோடாகும்.

P வழியாக நிலைதிசையில் வரையப்படும் நேர்கோடு OQஐ நீட்டியபோது C-ல் சந்திக்கட்டும்.

படம் 34.

$$\therefore\ PC \parallel OR$$

$$\angle QPC = \angle ORQ$$

$$= \angle OQR \quad [\because OQ = OR]$$

$$= \angle PQC$$

$$CP = CQ$$

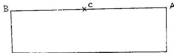
மேலும் $OC = OQ + QC$ ஆரங்களின் கூட்டுத்தொகை.

எனவே Pஐ மிக உயரமாகக் கொண்டு, அதே நிலை சமதளத்தில் வரையப்படும் வட்டம் கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தைக் Q-வில் தொடும்.

$\therefore$ PQ என்பது நமக்கு வேண்டிய நேர்கோடாகும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. மாறிலி முடுக்கத்துடன் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் இரயில் வண்டியின் இரண்டு முடிவுகளும் ஒரு புள்ளியைத் தாண்டிச் செல்லும்போது அதன் திசைவேகம் U, V ஆகும். வண்டியின் நடுப்புள்ளி அதே புள்ளியைத் தாண்டிச் செல்லும்போது அதன் திசைவேகம் $\sqrt{\frac{U^2+V^2}{2}}$ என்று காண்பிக்க.



படம் 35.

இரயில் வண்டியின் நீளம் 'l' என்றும் தாண்டிச் செல்லவேண்டிய புள்ளி O என்றும் கொள்க.

மாறிலி முடுக்கம் 'f' என்க.

A, Oஐத் தாண்டும்போது இரயில் வண்டியின் திசைவேகம் $= U$

இரயில் வண்டி 'l' தூரம் நகர்ந்தவுடன்தான் B, O-க்கு வரும். எனவே அப்போது வண்டியின் திசைவேகம் V என்றால்

$$V^2 = U^2+2f \cdot l$$

இரயில் வண்டி $\frac{l}{2}$ தூரம் நகரும்போது வண்டியின் நடுப்புள்ளியான 'C', Pஐ அடையும்

$$V^2_C = U^2+2f\frac{l}{2}$$

$$= U^2+\tfrac{1}{2}[V^2-U^2]$$

$$= U^2+\frac{V^2}{2}-\frac{U^2}{2}$$

$$= \frac{U^2+V^2}{2}$$

$$\therefore \quad V_C = \sqrt{\frac{U^2+V^2}{2}}$$

2. ஒரு துகள் மாறிலி முடுக்கத்துடன் நகர்ந்துகொண்டிருக்கிறது. ஆரம்பித்த ஏழாவது, பதினொன்ருவது விநாடிகளில் துகள் முறையே 640 செ.மீ., 920 செ.மீ. தூரம் நகர்ந்திருக்கிறது. ஆரம்பத் திசை வேகத்தையும் முடுக்கத்தையும் கண்டுபிடிக்க.

ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U' செ.மீ. / விநாடி என்றும் மாறிலி முடுக்கம் f செ.மீ. / விநாடி^{2} என்றும் எடுத்துக் கொள்க.

't'-ஆவது விநாடியில் துகள் நகரும் தூரம் $= U+\frac{1}{2}f(2t-1)$

$$\therefore\ 640 = U+\frac{f}{2}\times 13$$

$$920 = U+\frac{f}{2}\times 21$$

$$\therefore\ 280 = 4f$$

$$\therefore\ f = 70 \text{ செ.மீ./விநாடி}^2$$

$$U = 640-\frac{70}{2}\times 13$$

$$= 640-35\times 13$$

$$= 640-455$$

$$= 185 \text{ செ.மீ./விநாடி.}$$

3. ஓர் இரயில் நிலையத்திலிருந்து ஓய்விலிருந்து தொடங்கி 2 கி.மீ. தூரத்திலுள்ள மற்ருெரு இரயில் நிலையத்துக்கு ஓர் இரயில் வண்டி சென்று நிற்கிறது. வண்டி, எஞ்சினுல் தூரத்தில் முதல் நான்கில் மூன்று பங்கு தூரம் ஒரே சீராக முடுக்கப்பட்டு மீதி தூரத்தில் ஒரே சீராக எதிர் முடுக்கப்படுகிறது.

இரயில் வண்டி இந்தப் பிரயாணத்துக்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் 4 நிமிடங்கள் என்ருல், முடுக்கம், எதிர்முடுக்கம், மிக அதிகமான திசைவேகம் இவைகளின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்க.



படம் 36.

PR தூரத்துக்குரிய முடுக்கம் f_1 என்றும்,

R-ல் இரயில் வண்டியின் திசைவேகம் 'V' என்றும்,

RQ தூரத்திற்குரிய எதிர்முடுக்கம் f_2 என்றும் எடுத்துக்கொள்க.

PR தூரத்தை வண்டி கடக்க எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் t விநாடிகள் என்ருல்,

RQ தூரத்தைக் கடக்கவேண்டிய நேரம் $(240-t)$ விநாடிகள் ஆகும்.

$$V = f_1 t \qquad \ldots\ldots(1)$$
$$150{,}000 = \tfrac{1}{2} f_1 t^2 \qquad \ldots\ldots(2)$$
$$V^2 = 2f_1 \times 200{,}000 \qquad \ldots\ldots(3)$$
$$= 400{,}000 f_1.$$

RQ தூரத்தை வண்டி கடக்கும்போது, ஆரம்பத் திசைவேகம் V, முடிவு திசைவேகம் 0. முடுக்கம் $-f_2$ ஆகும்.

$$0 = V - f_2(240-t) \qquad \ldots\ldots(4)$$
$$50{,}000 = V(240-t) - \tfrac{1}{2} f_2 (240-t)^2 \qquad \ldots\ldots(5)$$
$$0 = V^2 - 2f_2 \times 50{,}000 \qquad \ldots\ldots(6)$$

சமன்பாடுகள் (3), (6)-லிருந்து

$$400{,}000 f_1 = 100{,}000 f_2$$
$$4f_1 = f_2$$

சமன்பாடுகள் (1), (4) இவைகளை நோக்கும்போது,

$$f_1 t = f_2(240-t)$$
$$= 4f_1(240-t)$$
$$t = 960 - 4t$$
$$5t = 960$$
$$t = 192$$

சமன்பாடு (2)-லிருந்து,

$$f_1 = \frac{2 \times 150{,}000}{192^2}$$
$$= \frac{300{,}000}{36864} \text{ செ.மீ./விநாடி}^2$$
$$f_2 = \frac{4 \times 300{,}000}{36864} \text{ செ.மீ./விநாடி}^2$$

மிக அதிக திசைவேகம் $= V$

$$= \frac{300{,}000}{36864} \times 192$$
$$= \frac{300{,}000}{192} \text{ செ.மீ./விநாடி}^2$$

4. ஓர் இரயில் வண்டியின் வேகம் 0-விலிருந்து 'U' வரை 'α' என்ற ஒரே விகிதத்தில் அதிகரிக்கிறது. பிறகு சிறிது நேரம் வேகம்

ஒரேநிலையில் இருந்து பிறகு 'β' என்ற ஒரே சீரான விகிதத்தில் '0'-க்குக் குறைகிறது. இரயில் வண்டி சென்ற மொத்தத் தூரம் 'l' என்றால் அதற்கான நேரம்

$$\frac{l}{V} + \frac{U}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right]$$ என நிறுபி.

't' நேரத்தில் இரயில் வண்டியின் வேகம் '0'-விலிருந்து 'U' வரை அதிகரிக்கட்டும். சென்ற தூரம் 's' என்று கொள்க.

$$U = \alpha t_1 \qquad \ldots\ldots(1)$$
$$s_1 = \tfrac{1}{2}\alpha t_1^2 \qquad \ldots\ldots(2)$$
$$U^2 = 2\alpha s_1 \qquad \ldots\ldots(3)$$

அடுத்த 't_2' நேரத்தில் வேகம் மாறாமலிருக்கட்டும். அப்பொழுது வண்டி சென்ற தூரம் 's_2'ஆகக் கொள்க.

$$s_2 = Ut_2 \qquad \ldots\ldots(4)$$

வண்டியின் வேகம் '0'-க்குக் குறையும் நேரம் 't_3'ஆகவும், அப்பொழுது சென்ற தூரம் s_3ஆகவும் கொள்க.

$$0 = U - \beta t_3 \qquad \ldots\ldots(5)$$
$$s_3 = Ut_3 - \tfrac{1}{2}\beta t_3^2 \qquad \ldots\ldots(6)$$
$$0 = U^2 - 2\beta s_3 \qquad \ldots\ldots(7)$$

$s_1 + s_2 + s_3 = l$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

'$t_1 + t_2 + t_3$'ஐக் கண்டுபிடிக்க,

(1), (4), (5)-லிருந்து

$$t_1 = \frac{U}{\alpha} \qquad \ldots\ldots(8)$$

$$t_2 = \frac{s_2}{U} \qquad \ldots\ldots(9)$$

$$t_3 = \frac{U}{\beta} \qquad \ldots\ldots(10)$$

(2), (6)-லிருந்து

$$\frac{s_1}{U} = \frac{t_1}{2} \qquad \ldots\ldots(11)$$

$$\frac{s_3}{U} = t_3 - \frac{t_3}{2}$$

$$= \frac{t_3}{2} \qquad \ldots\ldots(12)$$

(9)+(11)+(12) என்றால்,

$$\frac{s_1+s_2+s_3}{U} = \frac{t_1}{2}+t_2+\frac{t_3}{2}$$

$$\frac{l}{U} = (t_1+t_2+t_3)-\frac{t_1}{2}-\frac{t_3}{2}$$

$$(t_1+t_2+t_3) = \frac{l}{U}+\frac{t_1}{2}+\frac{t_3}{2}$$

(8), (10) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$t_1+t_2+t_3 = \frac{l}{U}+\frac{U}{2\alpha}+\frac{U}{2\beta}$$

$$= \frac{l}{U}+\frac{U}{2}\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right]$$

5. கிணற்றுக்குள் போட்ட கல் அதன் அடியை விநாடிக்கு 96 அடி திசைவேகத்தில் அடைகிறது. கல் கிணற்றில் விழுகின்ற சப்தம் மேலே கேட்பதற்கு, கல் கீழே போடப்பட்ட நேரத்திலிருந்து $3\frac{9}{70}$ விநாடிகள் ஆகின்றன. சப்தத்தின் திசைவேகம் என்ன?

கிணற்றின் ஆழம் 'h' அடிகள் என்போம்.

$$\therefore\ 96^2 = 0+2gh. \quad [g = 32]$$

$$64h = 96\times 96$$

$$\therefore\ h = 144$$

கீழே விழும் நேரம் 't' என்றால்

$$96 = gt$$

$$\therefore\ t = 3 \text{ விநாடிகள்.}$$

சப்தம் 144 அடிகள் மேலே வரப் பிடிக்கும் நேரம்,

$$3\tfrac{9}{70}-3 = \tfrac{9}{70}$$

$$\therefore \text{ சப்தத்தின் திசைவேகம் } = \frac{144}{\frac{9}{70}}$$

$$= \frac{\overset{16}{\cancel{144}}\times 70}{\cancel{9}}$$

$$= \mathbf{1120} \text{ அடிகள்/விநாடி.}$$

6. 480 அடி உயரத்திலுள்ள கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு பந்து கீழே போடப்பட்டது. அதே நேரத்தில், மற்றொரு பந்து கீழே இருந்து விநாடிக்கு 160 அடி திசைவேகத்துடன் நேர்மேலே எறியப் படுகிறது. பந்துகள் ஒன்றையொன்று கடக்கும் இடத்தின் உயரத்

தையும் அதற்கான நேரத்தையும் கணக்கிடுக. அவைகளுக்கிடையே உள்ள சார்திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடி.

't' விநாடிகள் கழித்து இரண்டு பந்துகள் சந்திப்பதாகக் கொள்ளுவோம். அப்பொழுது சந்திக்கும் இடத்தின் உயரம் தரைக்கு மேலே 'h' அடிகள் எனவும், இரண்டு பந்துகளின் திசைவேகங்கள் முறையே V_1, V_2 என்றும் கொள்க.

$$V_1 = gt \quad \ldots\ldots(1)$$
$$480-h = \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \ldots\ldots(2)$$
$$V_2 = 160-gt \quad \ldots\ldots(3)$$
$$h = 160t-\tfrac{1}{2}gt^2 \quad \ldots\ldots(4)$$

(2)+(4)

$480 = 160t$

$\therefore\ t = 3$ விநாடிகள்

$h = 480-\frac{1}{2}\times\overset{16}{32}\times 9$

$= 480-144$

$= 336$ அடிகள்

$V_1 = 32\times 3 = 96$ அடிகள்/விநாடி

$V_2 = 160-32\times 3$

$= 160-96$

$= 64$ அடிகள்/விநாடி

சார்திசை வேகம் $= 96+64$

$= 160$ அடிகள்/விநாடி.

7. சாய்தளத்தின்மேல் நழுவிச் செல்லும் ஒரு துகள் 4ஆவது விநாடியில் 1716·75 செ.மீ. தூரம் செல்லுகிறது. தளத்தின் சாய்வு கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

't'வது விநாடியில் ஒரே சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்கும் துகள் நகரும் தூரம் $= U+\frac{f}{2}(2t-1)$

இங்கு $U=0\quad t=4$

$\therefore\ 1716{\cdot}75 = \frac{f}{2}(7)$

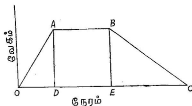
$\frac{3433{\cdot}50}{7} = f$

$$\therefore\ f = 490{\cdot}5$$
$$f = g \sin \alpha$$
$$\sin \alpha = \frac{490{\cdot}5}{981}$$

[இங்கு, g = 981 செ.மீ./விநாடி^{2} என்பதைக் கவனிக்க]

$$= \tfrac{1}{2}$$
$$\alpha = 30°$$

8. ஓர் இரயில் வண்டி ஓய்விலிருந்து புறப்படும் இடத்திற்கும் போய் நிற்கும் இடத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரம் 2 மைல்கள். அதற்கான நேரம் 4 நிமிடங்கள். வண்டியின் அதிகபட்ச வேகம் மணிக்கு 45 மைல்கள். முடுக்கமும் எதிர்முடுக்கமும் ஒரே சீரானவை. அதிகபட்ச வேகத்தில் வண்டி ஓடும் தூரத்தைக் கண்டுபிடி.



படம் 37.

$OABC$ என்பது நேரம்—திசைவேகம் வரைபடத்தைக் குறிக்கும். OA சீரான முடுக்கத்தையும் AB சீரான அதிகபட்ச திசைவேகத்தையும் BC சீரான எதிர்முடுக்கத்தையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

$AD = BE = 45$ மைல்கள்/மணி $= \dfrac{\overset{3}{\cancel{45}} \times 22}{\cancel{15}}$ அடிகள்/விநாடி

$OC = 4$ நிமிடங்கள் $= 240$ விநாடிகள்

4 நிமிடங்களில் வண்டி ஓடும் தூரம்

$= OCBA$-ன் பரப்பளவு

$= (\triangle OAD +$ நீண்ட சதுரம் $DEBA + \triangle ECB)$

என்பவைகளின் பரப்பளவு

$$2 \text{ மைல்} = 10560 \text{ அடிகள்} = \tfrac{1}{2}OD\,.\,DA + DA\,.\,DE + \tfrac{1}{2}EC\,.\,EB$$
$$= AD\left[\tfrac{1}{2}OD + DE + \tfrac{1}{2}EC\right]$$
$$\frac{10560}{66} = \tfrac{1}{2}OD + DE + \tfrac{1}{2}EC$$
$$160 = \tfrac{1}{2}\left[OD + EC + DE\right] + \tfrac{1}{2}DE$$
$$= \tfrac{1}{2}\,OC + \tfrac{1}{2}DE$$
$$= 120 + \tfrac{1}{2}DE$$
$$40 = \tfrac{1}{2}DE$$
$$80 = DE$$

சீரான அதிகபட்சத்துடன் வண்டி ஓடும் தூரம்

$$= DA\,.\,DE$$
$$= 66 \cdot 80$$
$$= 5280 \text{ அடிகள்}$$
$$= 1 \text{ மைல் தூரம்}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. 80 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்தில் நிலைதிசையில் மேல் நோக்கிச் செலுத்தப்படும் ஒரு துகளின் (1) திசைவேகம் 16 அடிகள்/விநாடி என்று எப்போது இருக்கும். (2) எறியப்பட்ட இடத்திற்குத் திரும்ப எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம். (3) எறி புள்ளியிலிருந்து 64 அடிகள் உயரத்திலிருக்கும் நேரம் இவைகளைக் கண்டுபிடி.

2. ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து 40 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்துடன் நிலைதிசையில் கீழ்நோக்கிச் செலுத்தப்படும் ஒரு பொருள் பூமியை அடைய 3 விநாடிகள் எடுத்துக்கொள்கிறதென்றல் கோபுரத்தின் உயரமென்ன?

3. கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஓய்விலிருந்து விழும் ஒரு பொருள், கடைசி விநாடியில் மொத்தத் தூரத்தில் $\frac{9}{25}$ பாகம் இயங்குகிறது. கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

4. நிலைதிசையில் மேல்நோக்கி ஒரு துகள் U திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படுகிறது. 't' விநாடிகள் கழித்து அதே ஆரம்பத் திசைவேகத்துடன் மற்றொரு துகள் அதே திசையில் செலுத்தப்படுகிறது. அவைகள் சந்திக்கும்போது

(1) இரண்டின் திசைவேகங்கள் $\frac{gt}{2}$

(2) இரண்டாவது துகள் எறியப்பட்ட நேரத்திலிருந்து $\left(\frac{t}{2}+\frac{u}{g}\right)$ விநாடிகள் ஆகியிருக்கும்.

(3) செலுத்தப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து $\frac{4U^2-g^2t^2}{8g}$ அடிகள் உயரம் சென்றிருக்கும் என்று நிரூபி.

5. ஒரு பந்து நிலைதிசையில் மேலே நோக்கி 128 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படுகிறது. 5 விநாடிகள் கழித்து இருக்கு மிடத்தைக் கண்டுபிடி. மேலே எறியப்பட்ட பந்து திரும்பி வந்து எறிபுள்ளிக்குக் கீழே 120 அடி ஆழத்திலுள்ள கிணற்றில் விழுந்தால், அப்படி விழும் நேரத்தையும் கண்டுபிடி.

6. ஒரு துகள் சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறது. ஆரம்பித்த நேரத்திலிருந்து 7ஆவது, 9ஆவது விநாடிகளில் துகள் முறையே 640 செ.மீ., 920 செ.மீ. தூரம் நகருகிறது. ஆரம்பத் திசை வேகத்தையும் முடுக்கத்தையும் கண்டுபிடி.

7. ஓய்விலிருந்து தொடங்கும் ஒரு துகள், சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறது. (n^2+n+1)-வது நொடியில் துகள் நகரும் தூரம், முதல் 'n' விநாடிகளில் நகரும் தூரமும் முதல் $(n+1)$ விநாடிகளில் நகரும் தூரமும் சேர்ந்த கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமானது என நிரூபி.

8. t_1, t_2, t_3 என்ற அடுத்தடுத்த இடைவெளி நேரத்தில் ஒரே சீரான முடுக்கத்துடன் நகரும் துகளின் சராசரி திசைவேகங்கள் முறையே V_1, V_2, V_3 என்றால் $\frac{V_1-V_2}{V_2-V_3}=\frac{t_1+t_2}{t_2+t_3}$ என்று காண்பி.

9. U_1, U_2 ஆரம்பத் திசைவேகங்களுடன் f_1, f_2 சீரான முடுக்கங்களுடன் இரண்டு கார்கள் ஒரு பந்தயத்திற்காக நேரான பாதையில் விரைந்து செல்லுகின்றன. சேரவேண்டிய இடத்தை அவைகள் ஒரே நேரத்தில் அடைந்தால், கார்கள் ஓடிய தூரம்,

$$\frac{2\,(U_1-U_2)\,(U_1 f_2-U_2 f_1)}{(f_1-f_2)^2}$$ என்று நிரூபி.

10. மணிக்கு 60 மைல் வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் இரயில் வண்டி தனது வேகத்தை, 800 அடிகள் தூரத்திற்குள் மணிக்கு 20 மைலாகக் குறைத்துக் கொள்கிறது. அப்படியானால் எவ்வளவு தூரம் ஓடி வண்டி நிற்கும்? வண்டியின் வேகத்தைத் தடுக்கும் சக்தி $12\frac{1}{2}\%$ அதிகரிக்கப்பட்டால் 800 அடிகள் தூரத்திற்குள் வண்டியை நிறுத்தலாமெனக் காண்பி.

11. ஒரே சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்கும் ஓர் இரயில் வண்டி அடுத்தடுத்த மைல் கற்களை 10 மைல்/மணி, 20 மைல்/மணி என்ற திசைவேகத்தில் கடக்கிறது. அடுத்த மைல் கல்லைக் கடக்கும்போது வண்டியின் திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடி. மேலும், ஒரு மைல் தூர முள்ள இரண்டு இடைவெளிகளைக் கடக்கவேண்டிய நேரங்களையும் கண்டுபிடி.

12. ஓய்விலிருந்து தொடங்கும் ஓர் இரயில் வண்டி முதல் மைலில் மணிக்கு 60 மைல் திசைவேகத்தை எட்டி, அடுத்த $\frac{1}{2}$ மைலில் வேகத்தைத் தடுக்கும் சக்தியினால் ஓய்விற்கு வருகிறது. ஆனால், முதல் மைலில் பாதை பழுதுபட்டிருந்து வண்டி மணிக்கு 20 மைல் வேகத்திற்குமேல் செல்லக்கூடாதென்றால் அது நிலையத்திற்கு 2 மணி 40 விநாடி தாமதமாக வருமெனக் காண்க.

13. ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஒரே சமயத்தில் புறப்படும் இரு துகள்கள் இரண்டு நேர்கோடுகளில் இயங்குகின்றன. முதல் துகள் சீரான திசைவேகம் "U"-வுடனும் இரண்டாவது துகள் சீரான முடுக்கம் 'f' உடனும் இயங்குகின்றன. அவைகளின் சார்திசை வேகம் மிகக் குறைவாக இருக்க $\frac{U \cos \alpha}{f}$ நேரமாகுமெனவும், மிகக் குறைவான திசைவேகம் $U \sin \alpha$ எனவும் காண்பி. [α= துகள்கள் இயங்கும் நேர்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம்.]

14. A நிலையத்திலிருந்து B நிலையத்திற்குச் செல்லும் ஓர் இரயில் வண்டி தன் பிரயாணத்தின் முதல் பகுதியில் 'f_1' முடுக்கத்துடன் பிற்பகுதியில் 'f_2' எதிர்முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறது. A-யிலிருந்து ஓய்விலிருந்து புறப்படும் வண்டி, B நிலையத்திற்கு வந்து நிற்கிறது. A-லிருந்து B-க்குச் செல்லும் நேரம் T என்றால்

$$T = \frac{2\alpha(f_1+f_2)}{f_1 f_2}$$ எனக் காண்பி. [α= A-க்கும் B-க்கும் இடையில் உள்ள தூரம்.]

15. ஒரு நிலையத்திலிருந்து புறப்படும் இரயில் வண்டி 8580 அடிகள் தொலைவிலுள்ள அடுத்த நிலையத்தையடைந்து நிற்க, 2 நிமிடம் 40 விநாடிகள் ஆகின்றது. முற்பகுதியில் சீரான முடுக்கத்துடனும், பிறகு 1 நிமிடம் 40 விநாடிகளுக்கு சீரான வேகத்துடனும் கடைசிப் பகுதியில் சீரான எதிர்முடுக்கத்துடனும் இயங்குகிறது. முடுக்கத்திற்கான நேரம் எதிர்முடுக்கத்திற்கான நேரத்தைப்போல் இரண்டு பங்கானால் சீரான வேகத்தைக் கண்டுபிடி. முடுக்கம், எதிர்முடுக்கம் இவைகளின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

16. ஓர் இரயில் வண்டி ஓய்விலிருந்து தொடங்கி 'f' என்ற சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்கிய பிறகு 'U' என்ற சீரான திசைவேகத்துடன் ஓடுகிறது. கடைசியில் 'f' என்ற சீரான எதிர்முடுக்கத்துடன் வண்டி அடுத்த நிலையத்தில் வந்து நிற்கிறது. வண்டி ஓடின மொத்த தூரம் 's' என்றும் அதற்கான நேரம் 't' என்றும் கொண்டால் 'U' என்ற சீரான திசைவேகத்துடன் ஓடிய நேரம்

$$\sqrt{t^2-\frac{4s}{f}}$$ என்று நிரூபி.

17. ஒரு துகள் நகர்ந்த தூரம் 's'ஐ x அச்சுத் தூரமாகவும் திசைவேகம் 'U'-ன் மறுதலை $\frac{1}{U}$-ஐ y அச்சுத் தூரமாகவும் கொண்டு ஒரு வளைவரை வரையப்பட்டால் இரண்டு தூரங்களிடையே துகள் நகருவதற்கான நேரம், வரைபடத்தில், y அச்சு, வளைவரை, x அச்சில் அவ்விரு தூரங்களுக்கிடையேயுள்ள பரப்பால் குறிக்கப்படு மெனக் காண்பி.

18. 288 அடி உயரத்தில் உள்ள கோபுர உச்சியிலிருந்து கீழே போடப்படும் ஒரு பொருள் அதே நேரத்தில் கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து நிலைதிசையில் மேல்நோக்கி எறியப்படும் மற்றொரு பொருளைப் பாதி தூரத்தில் சந்திக்கிறது. இரண்டாவது பொருளின் ஆரம்பத் திசைவேகம் என்ன?

19. நிலைதிசையில் மேல்நோக்கி, U செ. மீ./விநாடி திசைவேகத்துடன் ஒரு பொருள் எறியப்படுகிறது. 't' விநாடிகள் கழித்து மற்றொரு பொருள் அதே திசையில் அதே திசைவேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. அந்த இரு துகள்களும் $\left(\frac{t}{2}+\frac{U}{g}\right)$ விநாடி கழித்து, $\frac{4U^2-g^2t^2}{8g}$ தூரத்தில் சந்திக்குமெனக் காண்பி.

20. மேலிருந்து கீழ் விழும்போது ஒரு துகள் ஒரே தூரத்தைக் கடக்க ஓர் இடத்தில் ஆகும் நேரத்தைவிட, மற்றோர் இடத்தில் 'm' விநாடிகள் குறைவாகவும், n அடி/விநாடி திசைவேகம் அதிகமாகவும் இயங்குமானால், அந்த இரு இடங்களின் பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்திகளின் பெருக்கிடை $\frac{m}{n}$ என்று நிரூபி.

21. 30° கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் மேல்நோக்கி 60 அடி/விநாடி திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் இயக்கப்படுகிறது. சாய்தளத்தின்மேல் துகள் நகர்ந்திருக்கும் தூரம், அதற்கான நேரம் இவைகளைக் கண்டுபிடி.

22. 40 அடி நீளமும் 9 அடி உயரமுள்ள சாய்தளத்தின் மேலிருந்து ஒரு துகள் நழுவி விடப்படுகிறது. தளத்தின் அடியை அடைய எவ்வளவு நேரமாகும். அப்பொழுது துகளின் திசைவேகம் என்ன என்பவைகளைக் கண்டுபிடி.

23. O-லிருந்து வரையப்படும் நிலைதளத்தில் O வழியாகச் செல்லும் நிலை அச்சின் ஒரே பக்கத்தில் 30°, 60° கோணங்கள் சாய்ந் திருக்கும் இரு நேர்கோட்டுக் கம்பிகளின் வழியாக O-லிருந்து தொடங்கி இரு துகள்கள் நகருகின்றன. முதல் துகளைப் பொறுத்த வரை இரண்டாவது துகளின் சார்திசை வேகம் $\frac{g}{2}$ என்றும் அது நிலை திசையிலேயே இருக்கும் எனவும் நிரூபி.

24. 288 அடி நீளமும் 60 அடி உயரமும் உள்ள ஒரு சாய்தளம் உள்ளது. சாய்தளத்தின் மேலிருந்து நழுவும் ஒரு துகள் சாய்தளத்தின் நீளத்தில் மூன்று பாகங்களைச் சம நேரத்தில் கடந்தால் அந்தச் சம நேரத்தைக் கண்டுபிடி.

25. அச்சு நிலைதிசையிலும், முனை மேல்நோக்கியுமுள்ள ஒரு பரவளையின் குவியத்திலிருந்து புறப்படும் ஒரு துகளின் மிக விரைவாக இறங்குவதற்கான நேர்கோட்டின் நீளம் பரவளையின் செவ்வகலத் துக்குச் சமமானது என நிரூபி.

26. நிலைதிசையில் உள்ள ஒரு வட்டத்தின் நாண்கள் வழியாக நழுவும் ஒரு துகள் வட்டத்தின் மிகக் குறைந்த உயரத்தில் வந்தடை கிறது. அப்பொழுது அதன் திசைவேகம் நாணின் நீளத்தின் விகிதத்தில் இருக்குமென நிரூபி.

27. நிலைதிசையிலுள்ள வட்டத்தின், கிடைதிசையில் உள்ள விட்டத்தின் முனையிலிருந்து புறப்பட்டு ஒரு நாணின் வழியாகத் துகள் நழுவுகிறது. அது எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம், நாண் நிலைதிசையுடன் உண்டாக்கும் கோணத்தின் இருக்கையின் வர்க்கமூலத்தின் விகிதத்தி லிருக்குமெனக் காண்பி.

4. இயக்க விதிகள்
(Laws of Motion)

முந்திய அத்தியாயத்தில், துகளின் இயக்கத்தைப்பற்றி ஆராயும்போது, அந்த இயக்கம் உருவாகுவதற்கான காரணங்களைப்பற்றிக் கருதவில்லை. இப்போது அம்மாதிரிக் காரணங்களையும் அதன் விளைவுகளையும்பற்றி விரிவாக ஆராய்வோம். முதலில் விசை என்பதன் அடிப்படையான தத்துவத்தைப்பற்றிச் சிந்திப்போம். விசையைப்பற்றித் தெளிவான வரையறை கொடுப்பது எளிதன்றென்றாலும், அதனால் உண்டாகும் விளைவுகளைக்கொண்டு, விசையின் போக்கை அறிவோம். முக்கியமாக, பொருள்களின் ஓய்வுற்ற நிலையையோ, ஒரே சீரான இயக்கத்தையோ மாற்றக்கூடிய தன்மை விசைக்கு உண்டென்பதை நாம் உணர்கிறோம்.

வரையறை : பொருளின் ஓய்வுற்ற நிலைமையை மாற்றவோ, மாற்றக்கூடிய சக்தியோ, அல்லது நேர்கோட்டில் அதன் சீரான இயக்கத்தை மாற்றவோ, மாற்றக்கூடிய சக்தியோ உண்டாக்கக்கூடிய காரணத்தை விசையெனலாம்.

குறிப்பு : விசைக்கு மதிப்பும், திசையும் உள்ளதாதலால் அது ஒரு வெக்டர் கணியமாகும்.

தற்போதைக்குப் பொருள்களைத் துகள்கள் என்றே கருதுவோம். இப்படிக் கருதுவதால் பொருள்களின் பல்வேறு பகுதிகளுக்கிடையே உள்ள தூரங்களைத் தவிர்க்கலாம். மேலும், பொருள்கள் தன்னைத்தானே சுற்றும்போது ஏற்படும் விளைவுகளைப்பற்றிக் கவனிக்கவேண்டியதில்லை.

திணிவு வரையறை : ஒரு பொருளின் திணிவு என்பது அந்தப் பொருளிலுள்ள பருப்பொருளின் அளவாகும்.

குறிப்பு : எனவே, ஒரு பொருளின் திணிவு அந்தப் பொருளின் தன்மையைப் பொறுத்தது அல்லாமல் மற்றப் பொருளின் தன்மையையோ அது பக்கத்தில் இருப்பதாலோ பாதிக்கப்படாது.

உந்தம் (Momentum) **வரையறை:** ஒரு பொருளின் எல்லாப் புள்ளிகளும் இணை நேர்கோடுகளில் சமதிசை வேகங்களுடன் இயங்கினால், அந்தப் பொருளின் உந்தம் என்பது, பொருளின் திணிவு, திசைவேகம் இவைகளின் பெருக்குத் தொகையாகும்.

ஒரு பொருளின் திணிவு 'm' என்றும், அது இயங்கும் திசைவேகம் 'V' என்றும் கொண்டால், உந்தம் $=m \times V$ ஆகும்.

உந்தத்தின் அலகு என்பது, அலகு திணிவுள்ள துகள் அலகு திசைவேகத்தால் இயங்குவதாகும். C.G.S. முறையில் அலகு திணிவை 1 கிராம் என்றும் அலகு திசைவேகம் விநாடிக்கு 1 செ.மீ. என்றும் கொள்வதால் 1 கிராம் திணிவுள்ள பொருள் 1 செ. மீ./விநாடி திசைவேகத்தில் இயங்கும்போது உண்டாகும் உந்தமே அலகு உந்தமாகும். இதை செ. மீ. கிராம் அலகுகள் எனலாம். F.P.S. முறையில் 1 பவுண்டு திணிவுள்ள பொருள் 1 அடி/விநாடி திசைவேகத்தில் இயங்கும்போது உண்டாகும் உந்தமே அலகு உந்தமாகும். இதைப் பவுண்டு அடி அலகுகள் எனலாம்.

குறிப்பு: உந்தம் ஒரு வெக்டர் கணியமாகும். mV உந்தம் 'V' திசைவேகத்தின் திசையிலே இயங்கும். எனவே, 'V' திசைவேகத்திற்கு OX, OY திசைகளில் V_1, V_2 என்று கூறுகள் இருந்தால், mV உந்தத்திற்கும் mV_1, mV_2 என்ற உந்தங்கள் OX, OY திசைகளில் உண்டு.

நியூட்டனின் இயக்க விதிகள்

1. ஒவ்வொரு பொருளும் ஓய்வுற்ற நிலையிலேயோ, நேர் கோட்டில் சீரான இயக்கத்திலேயோ இருக்கும். இந்த நிலை மாற, வெளியிலிருந்து அழுத்தக்கூடிய விசையிருத்தல் வேண்டும்.

2. ஓர் அலகு நேரத்தில் உந்தத்தின் மாறுதல், அழுத்தக்கூடிய விசைக்கு விகிதாசாரமாக இருக்கும். அந்த மாறுதல், விசை இயங்கும் நேர்கோட்டுத் திசையிலேயே அமையும்.

3. ஒவ்வொரு செயலுக்கும், சமமான எதிர்ச்செயல் இருக்கும். அல்லது இரு பொருள்களுக்கிடையே உள்ள செயல்கள் சமமாகவும் எதிர்த் திசையில் அமையும்படியும் இருக்கும்.

இந்த விதிகள் வேறு அமைப்புகளில் வெளியிடப்பட்டிருந்தாலும், முறையாக வெளியிட்ட பெருமை நியூட்டனையே சாரும்.

இந்த விதிகளுக்கான தீர்வுகள் செயல்முறையாகவோ அல்லது கணித ரீதியாகக் கொடுக்கப்பட முடியாவிட்டாலும், நம்மைச்

சுற்றியுள்ள பொருள்களின் இயக்கங்கள் மேற்கண்ட விதிகளைச் சார்ந்திருக்கின்றன என்பது ஒரு பெரிய உண்மையாகும்.

இந்த விதிகளின் உண்மைகளைக் கண்டுபிடிக்குங்கால், நியூட்டனின் மற்றொரு விதியைக் கவனிப்பது நல்லது. அதை நியூட்டனின் ஈர்ப்புச் சக்தி விதியெனலாம். அந்த விதியாவது: பொருளின் ஒவ்வொரு துகளும் மற்ற ஒவ்வொரு துகளையும் தன் பக்கம் இழுக்கிறது. அதற்கான விசை, துகள்களின் திணிவுகளின் பெருக்குத்தொகை விகிதாசாரமாகவும், துகள்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தின் இருப்புக்கு எதிர் விகிதாசாரமாகவும் உள்ளது. இந்த விதியின் உண்மையும் கண் கூடாகக் காணக்கூடியதாகும்.

விளக்கம்—முதல் விதி: முதல் விதி பொருள்களின் சக்தியற்ற தன்மையை விளக்குகிறது. அதாவது பொருள் தனது சக்தியினால் ஒய்வுற்ற நிலையையோ, இயக்கத்தையோ மாற்ற இயலாது. அதாவது, வெளிப்புறத்து விசையில்லாதிருந்தால், அதன் நிலையில் மாறுதலிராது. எனவே, பொருள்களின் இயக்க மாறுதலுக்கு வெளி விசையே காரணமாகும். விசையின் வரையறைப்படி பொருளின் ஒய்வற்ற நிலையையோ, சீரான இயக்கத்தையோ மாற்றும் சக்தியோ அல்லது மாற்றக்கூடிய சக்தியோ உடையதாயிருக்கும்.

இரண்டாவது விதி முதற்பாகம்: இரண்டாவது விதியின் முதற் பாகம் விசையின் அலகுகளை வரையறுத்துக் கூறுகிறது. மேலும் இயக்கவியலின் அடிப்படைச் சமன்பாட்டை நிலைநிறுத்துகிறது.

P அளவுள்ள ஒரு விசை 'm' திணிவுள்ள ஒரு பொருளில் 'f' முடுக்கத்தை உண்டாக்கினால்

$P \propto$ உந்தத்தின் மாறுதலின் வீதம்

$\propto$ 'm' V-ன் மாறுதலின் வீதம்

$\propto$ 'm' $\times$ (V-ன் மாறுதலின் வீதம்)

$\propto m \times f$

$\therefore \quad P = k.m.f$ [இங்கு k ஒரு மாறிலியாகும்]

இப்போது விசையின் அலகை, $k=1$ என்றாகும்படித் தேர்ந்தெடுப்போம்.

அதாவது $f=1$, $m=1$ என்னும்போது $P=1$ என்றால் $k=1$ ஆகிறது.

எனவே, விசை அலகு திணிவின்மேல் செலுத்தப்படும்போது அலகு முடுக்கம் உண்டாகுமானால், அந்த விசையை அலகுவிசை யெனலாம்.

எனவே அடிப்படைச் சமன்பாடு $\boldsymbol{P = mf}$ ஆகும்.

குறிப்பு : திணிவின் அலகை ஒரு பவுண்டாகவும், தூரம், நேரம் இவைகளின் அலகுகளை முறையே அடி, விநாடி என்றும் கொண்டால், விசை அலகு ஒரு பவுண்டலாகும்.

திணிவின் அலகை ஒரு கிராமாகவும், தூரம் நேரம் இவைகளின் அலகுகளை முறையே செ. மீ., விநாடி என்றும் கொண்டால், விசை அலகு ஒரு டைன் (Dyne) ஆகும்.

குறிப்பு : பவுண்டலும், டைனும் ஒரு நிரந்தர அலகுகளாகும். ஏனெனில், அவைகளின் மதிப்புகள் எல்லா இடங்களிலும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும். பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் பாதிக்கப்படாது.

இரண்டாம் பாகம் : இயக்கத்தின் மாறுதல் விசையின் திசையிலேயே இருக்குமென்பது இதனால் தெளிவாகிறது. இதை விசைகளின் பௌதிக சார்பற்ற கொள்கை எனலாம்.

அதாவது, ஒரு பொருளின் மேலும் விசை இயங்கும்போது அது தனது திசையிலேயே உந்தத்தின் மாறுதலை உண்டாக்குகிறது. பொருள் ஓய்வுற்ற நிலையில் இருந்தாலும், வேறொரு திசையில் சீராக இயங்கிக்கொண்டிருந்தாலும், அல்லது மற்ற விசைகளால் தாக்கப் பட்டிருந்தாலும், உந்தத்தின் மாறுதல் விசையின் திசையிலே அடையும். அதாவது ஒரு பொருள் பல விசைகளால் தாக்கப்படும் போது, ஒவ்வொரு விசையும் தனது திசையிலேயே மற்ற விசைகளின் இருக்கையைப் பொருட்படுத்தாமல் முடுக்கத்தை உண்டாக்கும். எனவே, பொருளின் உண்மையான முடுக்கம் எல்லா முடுக்கங்களின் விளைவு முடுக்கமாகும்.

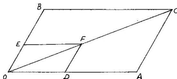
விசைகளின் இணைகர விதி தேற்றம்

OA, OB என்ற நேர்கோடுகள், O என்ற புள்ளியில் அமைந் திருக்கும் துகளின்மீது செயல்படும் இரண்டு விசைகளின் அளவை களையும் திசைகளையும் குறித்தால், இந்த விசைகளின் விளைவு, $OACB$ என்ற இணைகரத்தின் OC என்ற மூலைவிட்டத்தால் அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படும்.

m என்ற திணிவுள்ள ஒரு துகள் 'O'-வில் இருக்கட்டும். அதன் மேல் செயல்படும் இரண்டு விசைகள் P, Q என்பவை அளவு, திசை இவைகள் இரண்டும் குறிக்கும்படி OA, OB என்ற நேர்கோட்டால் குறிக்கப்படவேண்டும்.

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, இந்த இரு விசைகளும் தனது திசையிலேயே முடுக்கங்களை உண்டாக்கும். அவைகளை f, f' என்று கொண்டால்,

$P = mf$, $Q = mf'$ என்றாகும்.



படம் 38.

OA, OB என்ற நேர்கோடுகளில் முறையே D, E என்ற புள்ளிகளைக் கொண்டு OD, OE என்பவை f, f' என்ற முடுக்கங்களைக் குறிக்கும் படிச் செய்க.

$\therefore OD = f$, $OE = f'$ ஆகின்றன. $ODEF$ என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

$$\frac{OA}{OB} = \frac{m.f}{m.f'}$$

$$= \frac{f}{f'}$$

$$\frac{OD}{OE} = \frac{f}{f'}$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OE}$$

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OE}$$

$$= \frac{AC}{DF} \quad [\because OB = AC, OE = DF]$$

மேலும் DF, AC-க்கு இணையாக உள்ளது.

$\therefore OFC$ என்பது ஒரு நேர்கோடாகும்.

$$\therefore \frac{OC}{OF} = \frac{OA}{OD}$$

$$= \frac{m.f}{f}$$

$$= m$$

$$\therefore OC = mOF$$

முடுக்கத்தின் இணைகர விதிப்படி OF, f, f' என்பவைகளின் விளைவு முடுக்கமான f'' ஐக் குறிக்கும்.

$$\therefore OC = m.f''$$

= விளைவு முடுக்கத்தை உண்டாக்கும் விசை.

$\therefore$ OC என்பது விளைவு விசையை அளவு, திசை இவைகளில் இரண்டையும் குறிக்கும்படி அமையும்.

மூன்ருவது விதி : பொருள்களின் தொகுதியின் கூறு பாகங் களிடையே உண்டாகும் செயல் அவைகளுடைய துகளுக்கிடையேயுள்ள கவர்ச்சியினுலோ அல்லது தொடர்பினுலோ உண்டாகும். இந்தச் செயல், பொருள்களின் தொகுதி மொத்தத்திற்கும் உள்ள உந்தத்தைப் பாதிக்காது. ஏனெனில் A, B என்ற இரு பொருள்கள் ஒன்றுக் கொன்று செயல்பட்டால் B-ன் மேல் A-ன் எதிர்விளை A-ன் மேல் B-ன் எதிர்விளைக்குச் சமமாகவும், எதிர்த்திசையிலும் அமையும். எனவே, விளையும் எதிர்விளையும் பொருள்களின் மீது சமமாக, ஆனல் எதிர் திசையில் இருக்கும்படி உந்தங்களை உண்டாக்கும். எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் பொருள்களின் மேலுள்ள மொத்த உந்தம் பாதிக்கப்படாது. இதையே நேர்கோட்டு உந்தக்காப்பு எனலாம்.

நேர்கோட்டு உந்தக்காப்பு விதி (Law of conservation of linear momentum): ஒன்றையொன்று கவர்ச்சிக்கும் அல்லது தாக்கும் துகள்களின் தொகுதியில், கொடுக்கப்பட்ட திசையில் நேர் கோட்டு உந்தம், அந்தத் திசையில் வெளிவிசை ஒன்றுமில்லா விட்டால், மாருமலிருக்கும்.

குறிப்பு : $P = m.f$ என்ற சமன்பாட்டில், f என்ற முடுக்கமும் P என்ற விசையும் மாறிலியாகவோ, மாறியாகவோ இருக்கலாம். நாம் இங்கு அவைகளை மாறிலியாகக் கொண்டு நேர்கோட்டில் துகளின் இயக்கத்தைக் கவனிப்போம்.

நிறை (Weight) வரையறை : ஒரு பொருளின் நிறை அதைப் பூமி ஈர்க்க அவசியமான விசையாகும். பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினுல் எல்லாப் பொருள்களும் 'g' என்ற முடுக்கத்துடன் இழுக்கப்படு கின்றன. ஒரு பொருளின் திணிவை 'm' என்றும் நிறையை 'w' என்றும் கொண்டால் $w = m.g.$ என்ருகும்.

1 பவுண்டு திணிவின் நிறை = 32 பவுண்டல்களாகும்.

அதேபோல் 1 கிராம் திணிவின் நிறை = 981 டைன்களாகும்.

எனவே பவுண்ட் நிறை, கிராம் நிறை இவைகளை முறையே F.P.S., C.G.S. முறைகளில் பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினுல் விளையும் விசையின் அலகு எனலாம்.

1 பவுண்டு நிறை $= g$ பவுண்டல்கள் $= 32$ பவுண்டல்கள்.
1 கிராம் நிறை $= g$ டைன்கள் $= 981$ டைன்கள்.

திணிவிற்கும் நிறைக்கும் உள்ள வித்தியாசம்: ஒரு பொருளின் திணிவு என்பது அந்தப் பொருளிலுள்ள துகள்களின் அளவைப் பொறுத்ததாகும். திணிவுக்கு அளவு ஒன்றுதான் உண்டு.

நிறையென்பது பொருளைப் பூமி ஈர்க்கும் விசையைப் பொறுத்தது. ஆதலால், பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் உண்டாகும் முடுக்கம் 'g' என்றால், நிறை$=$திணிவு$\times g$ ஆகிறது. இடத்துக்கு இடம் 'g'-ன் அளவு மாறுவதால், பொருளின் நிறையும் இடத்துக்கு இடம் மாறு மென்பது தெளிவு. $g=0$ என்ற இடத்துக்கு 'm' திணிவுள்ள ஒரு பொருளை எடுத்துச்செல்ல முடிந்தால் அங்கு அதன் நிறை '0' ஆகும்.

எனினும் ஒரே இடத்தில் m_1, m_2 என்ற திணிவுள்ள பொருள்களின் நிறைகள் முறையே w_1, w_2 என்றால்

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{m_1g}{m_2g}=\frac{m_1}{m_2} \text{ ஆகின்றது.}$$

அதாவது ஒரே இடத்தில் பொருள்களின் நிறைகள் அவைகளின் திணிவுகளின் விகிதத்தில் இருக்கும்.

உராய்வு: துகள் அமர்ந்திருக்கும் மேற்பரப்பு முக்கால்வாசி வழவழப்பா யிருக்குமெனக் கொள்வது மரபு. அதாவது துகளுக்கும் அது அமர்ந்திருக்கும் மேற்பரப்புக்குமிடையே, மேற்பரப்பின் வழியிலேயே துகளின் இயக்கத்தைத் தடை செய்யும்படியாக ஒரு விசை கிடையாது. ஆனால், மேற்பரப்பின்மேல் அதன் வழியிலேயே ஒரு துகள் இயங்கும்போது, உராய்வு என்ற ஒரு விசை துகளின் இயக்கத் தைத் தடை செய்கிறது.

செய்முறைகளின்படி பார்க்கும்போது, ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளின்மீது இயங்கும்போது ஏற்படும் உராய்வு என்ற விசைக்கும் இரண்டு மேற்பரப்புகளுக்கிடையே உள்ள நேர்குத்து எதிர்விசைக்கும் ஒரு மாறிலி விகிதம் உண்டு என்பது தெளிவாகிறது. அந்த மாறிலி விகிதத்தின் மதிப்பு இரண்டு மேற்பரப்புகளின் தன்மைகளைப் பொறுத்தது. அந்த விகிதத்தை இயக்கவியலின் உராய்வு கெழு எனவும் அதை 'μ' என்ற எழுத்தால் குறிப்பிடுவதும் மரபு.

F என்பதை உராய்வுவிசை யெனவும், R என்பதை நேர்குத்து எதிர்விசை யெனவும் கொண்டால்,

$$F = \mu R.$$

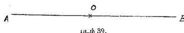
குறிப்பு: விசை திசையிலுள்ள ஒரு மேற்பரப்பின்மேல் 'm' திணிவுள்ள ஒரு துகள் இயங்கினுல்,

$$R = mg, F = \mu mg \text{ என்ருகிறது.}$$

அதேபோல் α சாய்வு கோணமுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் துகள் இயங்கினுல்,

$$R = mg \cos \alpha, F = \mu mg \cos \alpha \text{ என்ருகிறது.}$$

தேற்றம் 1: வெளி மாறிலி விசையினுல் செயல்பட்டு, உராய்வுடைய விசை திசையிலுள்ள சமதளத்தின்மேல் இயங்கும் துகள்:



படம் 39.

துகளின் திணிவு m என்றும், வெளி மாறிலிவிசை P என்றும், μ உராய்வு கெழு என்றும் கொள்ளுவோம். AB கிடைதிசையிலுள்ள சமதளமாதலால் O என்ற துகளுக்கு நிலைதிசையில் இயக்கம் கிடையாது.

$$\therefore \quad R = mg$$

$$F = \mu R \text{ ஆகும்.}$$

AB திசையில் விளைவு விசை $= P - F$

$$= P - \mu R \text{ ஆகிறது}$$

$$= P - \mu mg \quad ,,$$

AB திசையில் 'O'-ன் முடுக்கம் 'f' என்ருல்

$$m \cdot f = P - \mu mg$$

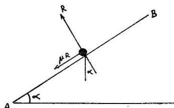
$$\therefore \quad f = \frac{P}{m} - \mu g \text{ ஆகும்.}$$

தேற்றம் 2: மாறிலி விசையினுல் செயல்பட்டு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மேல் இயங்கும் துகள்.

'α' கோணமுள்ள சாய்தளத்தின்மேல் m திணிவுள்ள துகளை P என்ற மாறிலிவிசை இழுக்கட்டும். அப்பொழுது F என்ற உராய்வு விசை எதிர்த்திசையில் துகளின் போக்கைத் தடைசெய்ய முயலும். துகளின் நிறை 'mg' என்பதற்குச் சாய்தளத்தின் நேர்குத்துத் திசையில் $mg \cos \alpha$ என்ற கூறும் அதன் திசையில் $mg \sin \alpha$ என்ற கூறும் உள்ளன.

சாய்தளத்தின் நேர்குத்துத் திசையில் துகளுக்கு இயக்கமில்லையாதலால்,

$$R = mg \cos \alpha$$



படம் 40.

துகள் சாய்தளத்தின்மேல் இயங்குவதற்குரிய விளைவு விசை $= P - \mu R - mg \sin \alpha. = P - \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha.$

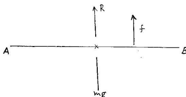
துகள் இயக்கத்துக்குரிய முடுக்கம் 'f' என்றால்

$$mf = P - \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha. \therefore f = \frac{P}{m} - \mu g \cos \alpha - g \sin \alpha$$

ஆகும். துகள் சாய்தளத்தின்மேல் நோக்கி செல்வதற்குப் பதில், கீழ்நோக்கி நகர்ந்தால் அப்போது அதன் முடுக்கம் $f = \frac{P}{m} - \mu g \cos \alpha + g \sin \alpha$ என்று ஆகும்.

தேற்றம் 3: நிலைதிசையில் இயங்கும் கிடைசமதளத்தின் மேலிருக்கும் பொருளின் அழுத்தம் :

AB என்ற கிடைசமதளம் 'f' என்ற சீரான முடுக்கத்துடன் நிலை திசையில் நகரட்டும். அதன்மேல் 'm' திணிவுள்ள பொருள் இருப்ப தாகக் கொள்க.



படம் 41.

பொருளின் விளைவுவிசை நிலைதிசையில் $R-mg$. எனவே $mf = R-mg$. $\therefore\ R = m(f+g)$ ......(1)

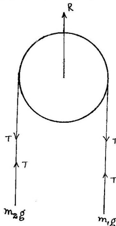
ஆனால், கிடைசமதளம் நிலைதிசையின் மேலே செல்வதற்குப் பதில் கீழ்நோக்கி நகர்ந்தால்

விளைவு விசை $= mg - R_1$ [R_1 என்பது இப்போதுள்ள எதிர்விளை]

$$\therefore\ mf = mg - R_1$$

$$\therefore\ R_1 = m(g-f) \quad ......(2)$$

(1) சமன்பாட்டிலிருந்து $R > mg$ என்றும் (2) சமன்பாட்டிலிருந்து $R_1 < mg$ என்றும் அறிகிறோம். எனவே, மேல்நோக்கிச் செல்லும் சமதளத்தின்மேல் அமர்ந்திருக்கும் மனிதன் தனது எடையைவிட அதிகமாகத் தான் இருப்பதாகவும், கீழ்நோக்கிச் செல்லும்போது, குறைந்திருப்பதாகவும் எண்ணுகிறான்.



படம் 42.

தேற்றம் 4: m_1 m_2, திணிவுள்ள இரு துகள்களை இரு முனைகளிலும் கட்டியிருக்கும் லேசான நீட்டவியலாத நூல், இலேசான உராய்வற்ற மாறுத கப்பிமேல் நகர்ந்தால், தொகுதியின் விளைவு இயக்கத்தையும் நூலின் இழுவிசை இவைகளையும் கண்டு பிடிக்க.

நூல் இலேசாக, இருப்பதால் அதன் இழுவிசை கப்பியின் இரு பக்கங்களிலும் ஒரே மாதிரியாக இருக்குமெனக் கொள்வது மரபு. அத்துடன் கப்பியும் இலேசாகவும் உராய்வற்றும் இருப்பதால், நூலின் பாகங்கள் ஒரு கப்பியின் ஒரு பக்கத்திலிருந்து மற்றொரு பக்கத்துக்குச் செல்லும்போது அதன் இழுவிசை மாறுமலிருக்கும். எனவே, மாறுத இழுவிசை 'T' எனக் கொள்ளுவோம்.

$m_1 > m_2$ ஆகட்டும். மேலும் நூல் நீட்டஇயலாது. ஆதலால் 'm_1' திணிவின் திசைவேகம் $=$ 'm_2' திணிவின் திசைவேகம்.

எனவே, 'm_1'-ன் கீழ்நோக்கிய முடுக்கம், m_2-ன் மேல்நோக்கிய முடுக்கத்துக்குச் சமமாகும். அந்நிலை முடுக்கத்தின் சம அளவை 'f' என்போம்.

'm_1' திணிவின் செலுத்தப்படும் விசைகள், கீழ்முக நிறை $m_1 g$-ம், மேல்முக நூலின் இழுவிசையும் ஆகும்.

$\therefore$ m_1 கீழ் நகரும்போது

$$m_1 f = m_1 g - T \qquad \ldots\ldots(1)$$

அப்போது m_2 மேல் நகருமாதலால்

$$m_2 f = T - m_2 g \qquad \ldots\ldots(2)$$

$\therefore$ (1)+(2)

$$(m_1+m_2)f = g(m_1-m_2)$$

$$\therefore f = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}.g$$

$m_1(1)-m_2(2)$

$$o = 2m_1 \cdot m_2 g - (m_1+m_2)T$$

$$\therefore T = \frac{2m_1 m_2}{m_1+m_2} \cdot g$$

இப்போது கண்ட 'f' முடுக்கம் மாறிலியாதலால், நூலின் திசை வேகம், அதன் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி 't' நேரத்தில் நகரும் தூரம் இவைகளை கண்டுபிடிக்கலாம்.

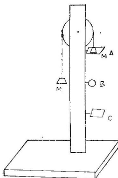
கப்பியின்மேல் செயற்படு விசை $= T+T$

$$R = \frac{4m_1 m_2}{m_1+m_2} g \text{ ஆகும்.}$$

அட்வூட் இயந்திரம் (Atwood's Machine): இலேசான கப்பியின்மேல் செல்லும் இலேசான நூலின் இரு முனைகளிலும் சம திணிவுகள் 'M', என்பவைகள் கட்டப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்ளுவோம். கப்பியின் அச்சு கிடைதிசையில் இருந்து சுற்றுவதால் கப்பிக்கு உராய்வு இல்லையெனக் கொள்க.

A என்ற தட்டின் மேல் 'M' திணிவு இருக்கும்போது அதன் மேல் 'm' திணிவுள்ள ஒரு சிறு பொருளை வைத்துத் தட்டை நகர்த்தவும். '$M+m$' என்ற திணிவினல் கீழே நகரும் பொருள் தொகுதி B-லுள்ள வளையத்தால் சிறுபொருள் மட்டும் நீக்கப்பட்டு 'M'

திணிவு மட்டும் இன்னும் கீழே நகர்ந்து C தட்டை அடையும். A-லிருந்து Bவரை தொகுதியின் முடுக்கம் $\frac{mg}{2M+m}$ ஆகிறது.



படம் 43.

$AB = h_1$ என்றால், தொகுதி Bஐ அடையும்போது அதன் திசை வேகம் $V^2 = 2\ \frac{mg}{2M+m} \cdot h_1$

$BC = h_2$ என்றால், B-லிருந்து C வரை 'M' திணிவு மட்டும் செல்ல நேரம் $t = \frac{h_2}{V}$ [நூலின் இரு பக்கங்களிலும் சமதிணிவு இருப்பதால், B-லிருந்து, M திணிவு ஒரே சீரான திசைவேகத்துடன் நகரும்.]

$$\therefore\ \frac{h_2^2}{t^2} = \frac{2mg.h_1}{2M+m}$$

$$\therefore\ g = \frac{h_2^2\,(2M+m)}{2mh_1t^2}$$

குறிப்பு: இந்தச் செயல்முறையின்மூலம் ஓர் இடத்தின் gஐ கண்டுபிடிக்கலாமென்றாலும், 'g'-ன் மதிப்புச் சரியாக இருக்குமெனச் சொல்லுவது இயலாது. அதற்கான காரணங்கள் :

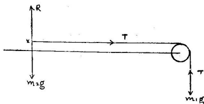
(1) கப்பியின் மேல் நூல் நழுவலாம்.

(2) உராய்வை ஒரேயடியாக நீக்க முடியாது.

(3) கப்பியின் திணிவைக் கவனிக்காமலிருப்பது சரியன்று.

(4) காற்றின் தடுக்கும்சக்தியை ஒரேயடியாக நீக்குவதும் சரியன்று.

தேற்றம் 5: வழுவழுப்பான கிடைதிசையிலுள்ள ஒரு மேஜையின் விளிம்பிலுள்ள இலேசான உராய்வற்ற கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் இலேசான நீட்டியலாத ஒரு நூலின் இருமுனைகளிலும் m_1, m_2 என்ற திணிவுள்ள இரு துகள்கள் இருப்பதாகக் கொள்க. m_2 திணிவு மேஜையின்மேல் இருப்பதாகவும், m_1 திணிவு தொங்கிக் கொண்டிருப்பதாகவும் கொள்க. விளைவு இயக்கத்தையும் நூலின் இழுவிசையையும் கண்டுபிடிக்க.



படம் 44.

நூல் இலேசாக இருப்பதாலும் கப்பி இலேசாகவும் உராய்வற்றதாக வும் உள்ளதாலும் நூலின் இழுவிசை எங்கும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும். நூல் நீட்டவியலாதபடியால், மேஜையின்மேல் 'm_2'-ன் திசைவேகமும் முடுக்கமும் முறையே தொங்கும் m_1-ன் திசைவேகத்திற்கும் முடுக்கத் திற்கும் சமமாகும்.

அவைகளின் சம அளவுள்ள முடுக்கம் 'f' என்று கொள்ளுவோம்.

m_1-ன் மேல் செலுத்தப்படும் விசைகள் கீழ்முகமான m_1g என்ற அதன் நிறையும், மேல்முகமான T என்ற நூலின் இழுவிசையுமாகும். எனவே கீழ்முக விளைவு விசை $= m_1g - T$.

$$\therefore \quad m_1f = m_1g - T \qquad \ldots\ldots(1)$$

மேஜைக்கு நேர்குத்துத் திசையில் m_2-க்கு இயக்கமில்லையாதலால்

$$R = m_2g \qquad \ldots\ldots(2)$$

கிடைதிசையில் m_2-ன் இயக்கத்திற்கு, T என்ற இழுவிசை மட்டும் காரணமாதலால்

$$m_2f = T \qquad \ldots\ldots(3)$$

(1)+(3)

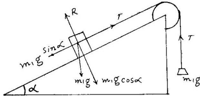
$$f(m_1+m_2) = m_1g$$

$$\therefore \quad f = \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot g$$

$$\therefore \quad T = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \cdot g$$

தேற்றம் 6 : கிடைதிசைக்கு 'α' கோணத்திலுள்ள சாய்தளத் தின் உச்சியிலுள்ள இலேசான உராய்வற்ற கப்பியின்மேல் செல்லும்

இலேசான நீட்டவியலாத நூலின் இரு முனைகளிலும் m_1, m_2 திணிவுள்ள இரு துகள்கள் உள்ளன. m_1 என்ற துகள் தடங்கலின்றித் தொங்கிக்கொண்டிருக்கிறது. m_2 என்ற துகள் சாய்தளத்தின் மேலுள்ள அப்போது அதைச் சேர்க்கும் நூல் சாய்தளத்திற்கு இணையாக உள்ளது. m_1 துகள் கீழே நகர்ந்தால், விளைவு இயக்கத்தை-யும், நூலின் இழுவிசையையும் கண்டுபிடிக்க.



படம் 45.

கப்பி இலேசாகவும் உராய்வற்றும் இருப்பதாலும் நூல் இலேசாக-வும், நீட்டவியலாததாகவும் இருப்பதாலும் நூலின் இழுவிசை அதிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் ஒரே அளவில் இருக்கும். மேலும் m_1 திணிவின் வேகமும், முடுக்கமும் m_2 திணிவின் வேகத்திற்கும் முடுக்கத்திற்கும் சமமாக இருக்கும்.

சீரான முடுக்கத்தை 'f' எனக் கொள்க. m_1 திணிவின் விளைவு விசை $= m_1g - T$.

$\therefore \quad m_1 f = m_1 g - T$ ......(1)

m_2 திணிவைப் பொறுத்தவரை சாய்தளத்திற்கு நேர்குத்துத் திசையில் இயக்கமில்லாததால்

$R = m_1 g \cos \alpha$ ......(2)

சாய்தளத்தின் போக்கில் விளைவு விசை

$T - m_2 g \sin \alpha$ ஆகிறது.

$\therefore \quad m_2 f = T - m_2 g \sin \alpha$ ......(3)

$(1)+(2) \quad (m_1+m_1)f = g[m_1 - m_2 \sin \alpha]$

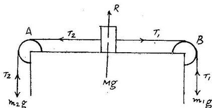
$f = \dfrac{m_1 - m_2 \sin \alpha}{m_1 + m_2} \cdot g$ ஆகிறது.

$m_2(1) - m_1(2)$

$$0 = T(m_1+m_2) - m_1 m_2 g\,(1+\sin\alpha)$$

$$\therefore\ T = \frac{m_1 m_2\,(1+\sin\alpha)}{m_1+m_2}\cdot g.$$

தேற்றம் 7 : ஒரு மேஜையின் இரு விளிம்புகளிலுமுள்ள இரு இலேசான உராய்வற்ற கப்பிகளின் மேலாகச் செல்லும் இலேசான நீட்டவியலாத நூல் 'M' திணிவுள்ள ஒரு பொருளை மேஜையிலிருத்தி, அதன் இரு முனைகளிலும் m_1, m_2 திணிவுள்ள இரு பொருள்கள் தடங்கலின்றித் தொங்குகின்றன. மொத்தத் தொகுதியின் இயக்கத்தையும், நூலின் இழுவிசைகளையும் கண்டுபிடிக்க.



படம் 46.

இரு கப்பிகளும் இலேசாகவும் உராய்வற்றும் இருப்பதால், அதன் மேல் செல்லும் நூலின் இழுவிசைகளும் கப்பியின் இரு பக்கங்களிலும் ஒரே அளவாயிருக்கும்.

A கப்பியில் T_2 இழுவிசையும், B கப்பியில் T_1 இழுவிசையும் இருப்பதாகக் கொள்க.

நூல் இலேசாகவும், நீட்ட வியலாததாகவும் இருப்பதால் m_1 திணிவின் முடுக்கம் m_2-ன் முடுக்கத்திற்குச் சமமாகும்.

m_1 திணிவு கீழ்முகமாக f முடுக்கத்துடன் செல்வதாகக் கொண்டால், தொகுதியின் விளைவு விசை நிலைக்குத்தில் $m_1 g - m_2 g$ ஆகிறது.

[M திணிவுக்கு மேஜையின் நேர்குத்துத் திசையில் இயக்கமில்லையாதலால் $R = Mg$ ஆகும்.]

m_1 திணிவுக்கு $m_1 f = m_1 g - T_1$

m_2 திணிவுக்கு $m_2 f = T_2 - m_2 g$

M திணிவுக்கு $Mf = T_1 - T_2$

$$\therefore (M+m_1+m_2)f = (m_1-m_2)g$$

$$\therefore f = \frac{m_1-m_2}{M+m_1+m_2}g.$$

m_1 திணிவின் நிலைதிசையில் இயக்கத்தைக் கவனிக்க

$$m_1 f = m_1 g - T_1$$

$$\therefore T_1 = m_1[g-f]$$

$$= m_1\left[g - \frac{(m_1-m_2)}{M+m_1+m_2}g\right]$$

$$= \frac{m_1[M+2m_2]}{M+m_1+m_2}g.$$

அதேபோல் 'm_2' திணிவின் நிலைதிசை இயக்கத்தை நோக்கின்

$$m_2 f = T_2 - m_2 g$$

$$\therefore T_2 = m_2[f+g]$$

$$= m_2\left[\frac{m_1-m_2}{M+m_1+m_2}\cdot g + g\right]$$

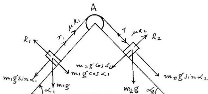
$$= \frac{m_2[M+2m_1]}{M+m_1+m_2}g.$$

குறிப்பு 8: α_1, α_2 என்ற கோணங்களைக் கிடைதிசையுடன் உண்டாக்கும் இரு உராய்வுடைய சாய்தளங்கள் A-ல் சந்திக்கட்டும். அதன் மேலுள்ள இலேசான உராய்வற்ற கப்பியின் வழியாகச் செல்லும் இலேசான நீட்டஇயலாத நூல், ஒரு சமதளத்தின் மேலுள்ள m_1 திணிவை ஒரு முனையிலும் மற்றொரு சமதளத்தின் மேலுள்ள m_2 திணிவை மற்றொரு முனையிலும் கொண்டிருக்கட்டும். 'm_1' திணிவுள்ள பொருள் சாய்தளத்தின்மேல், கீழ்நோக்கி நகரட்டும். அப்போது ஏற்படும் முடுக்கம், நூலின் இழுவிசை இவைகளைக் கண்டு பிடிக்க.

m_1 திணிவு, m_2 திணிவு இவைகளுக்கு அவைகள் அமர்ந்திருக்கும் சாய்தளங்களின் நேர்குத்துத் திசையில் இயக்கமில்லையாதலால்

$$R_1 = m_1 g \cos\alpha_1 \quad ......(1)$$

$$R_2 = m_2 g \cos\alpha_2 \quad ......(2)$$



படம் 47.

m_1 திணிவு கீழ்நோக்கி நகருவதால் அப்போதுள்ள விளைவு விசை $m_1 g \sin\alpha_1 - T - \mu R_1$ ஆகும்.

$$\therefore \quad m_1 f = m_1 g \sin\alpha_1 - T - \mu R_1$$
$$= m_1 g \sin\alpha_1 - T - \mu(m_1 g \cos\alpha_1) \qquad \text{......(3)}$$

m_1 திணிவு கீழ்நோக்கி நகருவதால், m_2 திணிவு மேல்நோக்கி நகருகிறது. அதனால் μR_2 உராய்வு கீழ்நோக்கிய திசையில் இயங்கும். எனவே விளைவு விசை $= T - m_2 g \sin\alpha_2 - \mu R_2$

$$= T - m_2 g \sin\alpha_2 - \mu m_2 g \cos\alpha_2$$

ஆதலால் $m_2 f = T - m_2 g \sin\alpha_2 - \mu m_2 g \cos\alpha_2 \qquad$ ......(4)

(3) + (4)

$$f(m_1 + m_2) = g\,[m_1(\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1) - m_2(\sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2)]$$

$$\therefore \ f = \frac{g}{m_1 + m_2}\,[m_1(\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1) - m_2(\sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2)]$$

$m_2(3) - m_1(4)$

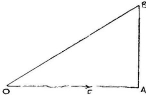
$$0 = -T(m_1 + m_2) + m_1 m_2 g \sin\alpha_1 - \mu m_1 m_2 g \cos\alpha_1 + m_1 m_2 g \sin\alpha_2 + \mu m_1 m_2 g \cos\alpha_2$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}[(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) + \mu(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)]$$

வேலை (Work): ஒரு பொருளின்மேல் செயல்படும் விசை செயல்பட ஆரம்பிக்கும் புள்ளியிலிருந்து துகளை நகர்த்தினால், பொருளின்மேல் வேலை நடப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

விசை மாறிலியானால், விசை செய்யும் வேலை, விசையின் அளவு, செயல்பட ஆரம்பிக்கும் புள்ளியிலிருந்து துகள் விசையின் திசையில் நகரும் தூரம் இவைகளின் பெருக்குத் தொகையாகும்.

குறிப்பு: வேலை ஓர் அளவு கணியமாகும். F எனும் விசை O-ல் செயல்பட ஆரம்பிக்கும் போது F, O-ல் உள்ள துகளை B-க்கு மாற்றினுல், அந்தத் தூரம், அதாவது OB, F-ன் திசையில் $OB \cos A\hat{O}B$



படம் 48.

$\therefore$ விசை செய்யும் வேலை $= F \cdot OB \cdot \cos \angle AOB$

$= [F \cdot \cos \angle AOB] OB$

= [பொருள் நகரும் திசையில் விசையின் கூறு] × பொருள் நகரும் தூரம்.

விசை ஒரு மாறிலியாகும் போது, விசை செயல்பட ஆரம்பப் புள்ளி விசையின் திசையில் ds தூரம் நகருவதாகக் கொண்டால்

$$\text{விசை செய்யும் வேலை} = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds$$

வேலையின் அலகுகள்: ஒரு பவுண்டல் விசை, அதன் செயல்படு புள்ளியை விசையின் திசையில் 1 அடி தூரம் நகர்த்தினுல், கிடைக்கும் வேலை அலகு வேலையாகும். இதை அடி பவுண்டல் எனலாம். (F.P.S. முறையில்). C.G.S. முறையில் 1 டைன் விசை செயல்படு புள்ளியை விசையின் திசையில் 1 செ.மீ. நகர்த்தும்போது விளையும் வேலை அலகு வேலையாகும். இதை எர்க் (erg) எனலாம்.

[10^7 எர்க்குகள் = 1 ஜூல்]

நீட்டவல்ல நூலின் இழுவிசை (Tension of an Elastic string)

வரையறை: செய்முறைகளின் மூலம், நூலின் இழுவிசை, சாதாரண நீளத்திற்குமேல் இழுக்கப்படும் தூரத்திற்கு வீத சமமாகும்.

இதைக் கண்டறிந்த பௌதிக விஞ்ஞானி ஹூக் கூறியதாவது: நூலின் சாதாரண நீளம் a என்றும் நீட்டப்பட்டபின் அதன் நீளம் x என்றும் கொண்டால், நூலின் இழுவிசை =

$$= \frac{\lambda (x-a)}{a}$$ என்றாகும்.

λ = நூலின் நீட்டவியலும் குணகம் எனக் கூறலாம்.

நீட்டக்கூடிய நூலை இழுக்கும்போது செய்யும் வேலையின் அளவு

'a' நூலின் சாதாரண நீளமாகவும், அந்த நூலை 'b' நீளத்திலிருந்து 'c' நீளத்திற்கு நீட்டுவதாகக் கொள்க.

நீட்டப்பட்ட நீளம் 'x' என்றால்

$$T = \frac{\lambda}{a}(x-a)$$

x-ல் மாறுதல் Δx ஆனால், இந்த மாறுதலால் ஏற்படும் வேலையின் அளவு $= T.\Delta x$.

$$\therefore \text{ மொத்த வேலை } = \sum_b^c T\Delta x$$

$$= \int_b^c T dx$$

$$= \frac{\lambda}{a}\int_b^c (x-a)dx$$

$$= \frac{\lambda}{2a}\left[(x-a)^2\right]_b^c$$

$$= \frac{\lambda}{2a}\left[(c-a)^2-(b-a)^2\right]$$

$$= \frac{\lambda}{2a}\left[(b+c-2a)(c-b)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(c-b)\left[\frac{\lambda}{a}\{(b-a)+(c-a)\}\right]\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{\lambda}{a}(b-a)+\frac{\lambda}{a}(c-a)\right]\times(c-b)$$

$$= \frac{[\text{கடைசி இழுவிசை} + \text{முதல் இழுவிசை}]}{2} \times [\text{நீட்டிய தூரம்}]$$

திறன் (Power) : வேலை செய்யக்கூடிய விகிதத்தைத் திறன் என்கிறோம்.

F.P.S. முறையில் குதிரைத் திறன் என்பது ஓர் அலகாகும். இதை H. P. என்று குறிக்கலாம்.

550 அடி பவுண்டு வேலையை 1 விநாடியில் செய்யும் திறன் குதிரைத் திறன் ஆகும்.

C.G.S. முறையில் 10^7 எர்க்குகள் = 1 ஜுலெ வேலையை 1 விநாடியில் செய்யும் திறனை ஒரு வாட் என்றும், அதைத் திறனின் ஓர் அலகாகவும் கொள்ளலாம்.

ஆற்றல் (Energy) : வேலை செய்யக்கூடிய திறமையை ஆற்றல் என்கிறோம். ஆற்றலின் அலகுகளும் வேலையின் அலகுகளும் ஒன்றே. இயக்கவியலில், ஆற்றல் இருவகைப்படும்.

(1) இயக்காற்றல் (இ. ஆ.)

(2) நிலை ஆற்றல் (நி. ஆ.)

இயக்காற்றல் (இ. ஆ.) (Kinetic energy) : ஒரு பொருளின் இயக்காற்றல் என்பது அது இயங்குவதினால் அடையும் ஆற்றலேயாகும்.

பொருள் இயங்குவதற்கு எதிராகச் செயல்படும் விசை அதைத் தடுத்து நிறுத்தும்போது செய்யப்படும் வேலையை இயக்காற்றல் என்கிறோம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில், ஒரு பொருளின் திசைவேகம் 'V' என்றும், அதன் பாதையிலுள்ள மாறாத புள்ளியிலிருந்து 's' தூரம் உள்ளதென்றும் கொள்க. F விசை, 'ds' தூரம் அப் பொருளை நகர்த்தட்டும். 'a' என்பதை முடுக்கம் என்க.

$$\therefore \text{ இயக்காற்றல் } = \int_s^0 -F\,ds$$

$$= \int_s^0 -ma\,ds$$

$$= \int_V^0 -m\frac{VdV}{ds}ds$$

$$= m \int_{0}^{V} V\,dV$$

$$= \frac{mV^2}{2}$$

V திசைவேகத்துடன் நகரும் 'm' திணிவுள்ள ஒரு பொருளின் இயக்காற்றல் $= \frac{1}{2}mV^2$.

m, கிராம்களிலும் V செ.மீ./விநாடியிலும் கொடுக்கப்பட்டால் இ. ஆ. = எர்க் என்ற அலகில் இருக்கும். (C.G.S. முறையில்)

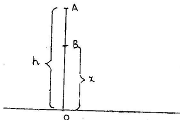
F.P.S. முறையில் இ. ஆ. = அடிப்பவுண்டல் என்ற அலகில் இருக்கும்.

நிலையாற்றல் (நி. ஆ.) (Potential energy): ஒரு பொருள் தனது இடத்திலிருந்து, மற்றோர் இடத்திற்குச் செல்லுவதற்கான வேலையை நிலையாற்றல் என்கிறோம்.

'm' என்ற திணிவுள்ள பொருள் பூமிக்குமேல் 'h' உயரத்தில் இருப்பதாகக் கொள்ளுவோம். எனவே, பொருளின் நிறை $= mg$ ஆகும். அதை 'h' தூரம் நகர்த்துவதற்கான வேலை $= mgh$ ஆகும்.

$\therefore$ நி. ஆ. $= mgh$.

ஆற்றலின் உந்தக் காப்புவிதி (Law of Conservation of Energy): ஆற்றலை அழிக்கவோ, ஆக்கவோ அல்லது குறைக்கவோ முடியாது. ஒருவகைப்பட்ட ஆற்றலை மற்றொரு வகை ஆற்றலாகத்தான் மாற்ற முடியும்.



படம் 49

இதைச் செங்குத்தாக விழும் ஒரு பொருள் கொண்டிருக்கும் மொத்த ஆற்றலின் மூலம் நிரூபிப்போம்.

A-லிருந்து 'm' திணிவுள்ள ஒரு துகள் நிலைதிசையில் விழுவதாகவும் கொள்ளுவோம். 't' நேரத்தில் துகள் B-ல் இருப்பதாகவும் கொள்ளுவோம்.

$$V_B = \sqrt{2g\,(h-x)}$$

$\therefore$ இயக்காற்றல் $= \frac{1}{2}mV^2$

$= \frac{1}{2}m2g\,(h-x)$

$= mg\,(h-x)$

x உயரத்தில் இருப்பதால் நிலை ஆற்றல் $= mgx$.

$\therefore$ இயக்காற்றல் + நிலை ஆற்றல் $= mg\,(h-x) + mgx = mgh$

$=$ மாறிலி

$\therefore$ O-ல் இயக்காற்றல் $= \frac{1}{2}m.2gh$

நிலையாற்றல் $= 0$

$\therefore$ கூட்டுத்தொகை $= mgh$

A-ல் இயக்காற்றல் $= 0$

நிலையாற்றல் $= mgh$

$\therefore$ கூட்டுத்தொகை $= mgh$

வேலை ஆற்றல் விதி (Law of Work-Energy)

துகளின் இருப்பிடத்தில் மாறுதல் ஏற்படும்போது, இயக்காற்றலிலுள்ள மாறுதல், செயற்படு விசைகளினால் உண்டாகும் வேலையின் அளவுக்குச் சமமாகும்.

's' தூரம் துகள் நகரும்போது, அதன் திசைவேகம் 'u' விலிருந்து 'v'-க்கு மாறுவதாகக் கொள்ளுவோம். அதற்கான விசை 'F' என்க.

$\therefore$ விசையினால் 'ds' தூரம் நகரும்போது செயற்படு வேலை

$$= \sum_{u}^{v} F\,ds$$

$$= \sum_{u}^{v} m.f.ds$$

$$= \sum_{u}^{v} m.\,v.\,\frac{dv}{ds}\,ds$$

$$= m \int_{u}^{v} v dv$$

$$= \frac{1}{2} m (v^2 - u^2) \text{ இயக்காற்றலின் மாறுதல்.}$$

ஆற்றல் அழிவின்மை விதி, அல்லது ஆற்றல் காப்பு விதி என்பதைப் பற்றிச் சற்று ஆராய்வோம். அந்த விதியை,

"ஒரு பொருளோ அல்லது ஒரு பொருளின் தொகுதியோ விசைகளின் காப்புநிலைத் தொகுதி செயல்படும்போது, அதன் இயக்காற்றல்கள், நிலைமாற்றங்கள் இவைகளின் கூட்டுத்தொகை ஒரு மாறிலியாகும்" என்று கூறலாம்.

மேற்கண்ட விசைகளைக் காப்புநிலை விசையெனலாம். அப்படிப் பட்ட விசைகள் பொருள்களின் நிலை அல்லது அவைகளின் அமைப்பு இவைகளைப் பொறுத்திருக்குமேயல்லாமல், பொருள்களின் இயக்கங்களால் ஏற்படும் திசைவேகங்கள் அல்லது அவைகளின் திசைகள் இவைகளைச் சார்ந்திருக்காது.

உராய்வு விசை, காற்றின் தடைவிசை இவைகள் காப்புநிலை விசைகள் அல்ல. உராய்வு விசையின் திசை, பொருள் இயங்கும் திசைக்கு எதிராக இருப்பதால் அது, திசையைச் சார்ந்திருக்கிறது. காற்றின் தடைவிசை, பொருளின் திசைவேகத்தின் அடுக்கின் விகிதத்தில் இருக்கும். எனவே, இவைகளைக் காப்புநிலை விசைகளிலிருந்து நீக்கவேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. 10 பவுண்ட் திணிவுள்ள ஒரு பொருள் கிடைதிசையிலுள்ள உராய்வற்ற மேஜையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதன்மேல் 3 பவுண்டு நிறைக்குச் சமமான விசை செலுத்தப்படுகிறது. அப்படியென்றால் 10 விநாடிகளில் பொருள் நகரும் தூரமென்ன?

பொருளின்மேல் செலுத்தப்படும் விசை = 3 பவுண்டு நிறை

$= 3g$ பவுண்டல்கள்

நகரும் பொருளின் திணிவு = 10 பவுண்ட்

முடுக்கம் $= \frac{3g}{10}$

$\therefore$ நகரும் தூரம் $= \frac{1}{2} \frac{3g}{10} \cdot 10^2$

$= 15g$

$= 480$ அடிகள்

2. 1 கிலோகிராம் திணிவுள்ள பொருளின்மேல் 5 விநாடிகள் செலுத்தப்படும் விசை, விநாடிக்கு 1 மீட்டர் திசைவேகம் உண்டாக்கினல் அந்த விசையின் அளவைக் கண்டுபிடிக்க.

திசைவேகம் = 1 மீட்டர்/விநாடி
= 100 செ.மீ./விநாடி

$\therefore$ முடுக்கம் $= \frac{100}{5}$
= 20 செ.மீ./(விநாடி)^2

$\therefore$ விசை = 1000×20 டைன்கள்
$= \frac{1000 \times 20}{981}$ நிறை
= 20·4 கிராம்கள்.

3. ஓர் இரயில் வண்டியும் அதன் எஞ்சினும் சேர்ந்து 203 டன்கள் எடை உள்ளன. எஞ்சின் மட்டும் 4 டன் இழுக்கக்கூடிய வலிவு பெற்றுள்ளது. வண்டியின் இயக்கத்துக்குத் தடை ஒரு டன்னுக்கு 20 பவுண்ட் நிறை என்ற விதத்தில் வேலை செய்கிறது. எஞ்சினின் பிரேக்குகளின் சக்தி டன்னுக்கு 400 பவுண்டு நிறை என்ற வீதத்தில் உள்ளது. இரயில் வண்டி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு மணிக்கு 40 மைல் கள் திசைவேகமடையும்வரை சீராக இயங்குகின்றது. இப்போது நீராவி தடைசெய்யப்பட்டு, பிரேக்குகளும் செலுத்தப்படுகின்றன. இரயில் வண்டி நிற்கும்வரை செல்லும் மொத்த தூரத்தையும் அதற்கான நேரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

எஞ்சினின் இழுப்புச் சக்தியினல், வண்டியின் இயக்கத்திலேயுள்ள விசை = $4 \times 2240g$ பவுண்டல்கள். அதற்குத் தடையான எதிர்விசை, 203 டன்கள் எடையினல் உண்டாகிறது.

$\therefore$ எதிர்விசை = $203 \times 20g$ பவுண்டல்கள்
$\therefore$ விளைவுவிசை = $4 \times 2240g - 203 \times 20g$
$= (8960 - 4060)g$
$= 4900g$ பவுண்டல்கள்

$P = m \times f$ ஆதலால்

முடுக்கம் $= \frac{4900g}{203 \times 2240}$ அடி/(விநாடி)^2
$= \frac{10}{29}$ அடி/(விநாடி)^2

$g = 32$ என்று கொள்க
$V =$ மணிக்கு 40 மைல்கள்
$= \frac{176}{3}$ அடி/விநாடி

$$V^2 = U^2+2fs$$

$$\left(\frac{176}{3}\right)^2 = 2\times\frac{10}{29}\times s$$

$$s = \frac{176\times 176\times 29}{9\times 20} \text{ அடிகள்} \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\text{நேரம் } V = U+ft$$

$$\frac{176}{3} = \frac{10}{29}\cdot t$$

$$\therefore\ t = \frac{176\times 29}{3\times 10} \text{ விநாடிகள்} \qquad \ldots\ldots(2)$$

இப்போது பிரேக்குகள் செலுத்துவதால் இயக்கத்திற்குத் தடை செய்யும் விசை,

$$= 203\ [20g+400g] \text{ பவுண்டல்கள்}$$

$$= 203\times 420\times g$$

$$\text{எதிர் முடுக்கம்} = \frac{\overset{6}{\cancel{203}\times\cancel{420}\times 32}}{\underset{140}{\cancel{203}\times\cancel{2240}}} \text{ அடி/(விநாடி)}^2$$

$$= 6 \text{ அடி/(விநாடி)}^2$$

$\frac{176}{3}$ திசைவேகத்துடன், 6 அடி/(விநாடி)^2 முடுக்கத்துக்கு உட்பட்டு வண்டி ஓய்விற்கு வருகிறது.

$$0 = \left(\frac{176}{3}\right)^2 - 12\times s'$$

$$\therefore\ s' = \frac{176\times 176}{9\times 12} \text{ அடிகள்} \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$\text{அதற்கான நேரம் } 0 = \frac{176}{3} - 6t'$$

$$\therefore\ t' = \frac{176}{3\times 6} \text{ விநாடிகள்} \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$(1)+(3) \qquad s+s' = \text{மொத்த தூரம்}$$

$$= \frac{176\times 176\times 29}{9\times 20} + \frac{176\times 176}{9\times 12}$$

$$= \frac{176\times 176}{9}\left[\frac{87+5}{60}\right]$$

$$= \frac{176\times 176\times 92}{9\times 60} \text{ அடிகள்}$$

$$= \frac{176\times 176\times 92}{9\times 60\times 3\times 220\times 8}$$

$$= \frac{2024}{2025} \text{ மைல்}$$

$$\text{மொத்த நேரம்} = \frac{176 \times 29}{30} + \frac{176}{18} \text{ விநாடிகள்}$$

$$= \frac{176}{90}\,[87+5]$$

$$= \frac{176 \times 92}{90}$$

$$= \frac{16192}{90}$$

$$= 179{\cdot}9 \text{ விநாடிகள்}$$

4. கிடைசமதளத்தில் மணிக்கு 48 மைல்கள் சீரானவேகத்தில் செல்லும் இரயில் வண்டி 75ல் 1 என்ற வீதத்திலுள்ள சாய்தளத்தின் மேல் ஏறுகிறது. சாய்தளத்தின்மேல் ஏறும்போது வண்டியின் எஞ்சினின் இழுப்புச் சக்தி கிடைதளத்திலுள்ளது போலிருக்கும். வண்டி எவ்வளவு தூரம் சாய்தளத்தின்மேல் சென்று நிற்கும்?

இரயில் வண்டி சீரான திசைவேகத்துடன் இயங்குவதால் எஞ்சினின் இழுப்புச் சக்தி, இரயில் வண்டியின் இயக்கத்துக்கு எதிரான எதிர் விசைக்கு சமமாகவேண்டும்.

சாய்தளத்துக்குமேல் செல்லும்போது, எஞ்சினின் இழுப்புச் சக்தியும், எதிர்விசையும் ஒரே அளவுக்கு இருக்குமானாலும், சாய்தளத்தின் போக்கில் வண்டியின் நிறையினுடைய கூறு, வண்டியைத் தடை செய்யத் தொடங்குகிறது.

வண்டி, எஞ்சின் இவைகளின் மொத்தத்திணிவு 'm' பவுண்டுகள் என்றால் அவைகளின் மொத்த நிறையின் கூறு, சாய்தளத்தின் போக்கில் $\frac{m \times g}{75}$ பவுண்டல்கள்

$$\therefore \quad P = m \cdot f \text{ ஆதலால்}$$

$$\text{எதிர்முடுக்கம்} = \frac{g}{75} \text{ அடி/(விநாடி)}^2$$

$$\text{ஆரம்பத் திசைவேகம்} = 48 \text{ மைல்/மணி}$$

$$= \frac{48 \times 88}{60} \text{ அடி/விநாடி}$$

வண்டி நிற்கும்போது திசைவேகம் $= 0$ ஆகும்

$$0 = \left(\frac{\overset{4}{\cancel{48}} \times 88}{\cancel{60}5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{g}{75} \cdot s$$

$$\therefore \quad s = \frac{16 \times 88 \times 88}{2525} \times \frac{75}{2 \times 32}$$

$$= \frac{\overset{11}{88} \times 88 \times 16 \times \overset{3}{75}}{25 \times 2 \times 32 \times \underset{30}{5280}}$$

$$= \frac{33}{30}$$

$= 1{\cdot}1$ மைல்

5. 500 பவுண்டுகள் திணிவுள்ள ஒரு பொருள் ஓய்விலிருந்து, கிடைதிசையுடன் $\sin^{-1} \frac{1}{20}$ கோணமுடைய சாய்தளத்தின்மேல் நழுவுகிறது. சாய்தளத்தின் உராய்வு 10 பவுண்டு நிறையாகும். ஆரம்ப இடத்திலிருந்து d அடிகள் தூரம் நகர்ந்தவுடன் பொருளின் வேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

சாய்கோணம் α என்றுல்

$$\sin \alpha = \frac{1}{20}$$

எனவே, சாய்தளத்தின் திசையில் பொருளின் நிறையின் கூறு

$= 500 \sin \alpha$ பவுண்டு நிறை

$= 500 \times \frac{1}{20}$

$= 25$ பவுண்டு நிறை

உராய்வு விசை $= 10$ பவுண்டு நிறை

எனவே விளைவு விசை $= 15$ பவுண்டு நிறை

$= 15 \times 32$ பவுண்டல்கள்

$F = mf$ என்பதால்

$$f = \frac{15 \times 32}{500}$$

$= \frac{24}{25}$ அடி/(விநாடி)^2

ஆரம்பத் திசைவேகம் $U = 0$

$$f = \frac{24}{25}$$

$$s = d$$

$$\therefore \quad V^2 = U^2 + 2fs$$

$$= 0 + 2 \times \frac{24}{25} \cdot d$$

$$= \frac{48}{25} d$$

$\therefore \quad V = \frac{4}{5} \sqrt{3d}$ அடி/விநாடி.

6. 10 அவுன்ஸ் திணிவுள்ள ஒரு குண்டு, ஓய்விலிருந்து 60 அடிகள் நிலைதிசையில் கீழ்நோக்கி விழுந்து, ஒரு கூரையின் ஊடே சென்று, அதன் திசைவேகத்தைப் பாதியாகக் குறைத்துக் கொண்டது. மேலும் 20 அடிகள் சென்று தரையைத் தாக்கி 1 அடி பள்ளத்தை உண்டாக்குகிறது. தரையின் சராசரித் தடையின் அளவைக் கண்டுபிடிக்க.

60 அடிகள் நகரும்போது குண்டு அடையும் திசைவேகம்

$$= \sqrt{2\times 32\times 60}$$

$$= 16\times\sqrt{15} \text{ அடிகள்/விநாடி}$$

கூரையின் ஊடே சென்ற பிறகு திசைவேகம்

$$= \sqrt{15} \text{ அடிகள்/விநாடி}$$

20 அடிகள் நகர்ந்து தரையை அடையும்போது குண்டின்

$$\text{திசைவேகம்} = \sqrt{64\times 15+2\times 32\times 20}$$

$$= \sqrt{960+1280}$$

$$= \sqrt{2240}$$

தரையின் தடை அளவு $= R$ பவுண்டு நிறை என்க.

குண்டின் நிறை $= 10$ அவுன்ஸ்

$$= \frac{10}{16} \text{ பவுண்டு நிறை}$$

$\therefore$ விளைவு தடை $= (R-\frac{5}{8})$ பவுண்டு நிறை

$$= (R-\tfrac{5}{8})\times 32 \text{ பவுண்டல்கள்}$$

$$F = mf$$

$$\left(R-\frac{5}{8}\right)\times 32 = \frac{5}{8}\times f$$

$$\therefore \quad f = \left(R-\frac{5}{8}\right)\times 32\times\frac{8}{5}$$

குண்டு தரைக்குள் 1 அடி சென்று நிலைபெறுகிறது.

$$0 = 2240-2\left[R-\frac{5}{8}\right]\times\frac{32\times 8}{5}\times 1$$

$$\therefore \quad R-\frac{5}{8} = \frac{\overset{35}{2240}\times 5}{8\times 32\times 2}$$

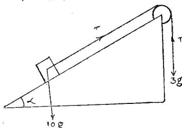
$$R = \frac{35\times 5}{8}+\frac{5}{8}$$

$$= \frac{\overset{9}{36}\times 5}{\underset{2}{8}}$$

$$= \frac{45}{2}$$

$$= 22{\cdot}5 \text{ பவுண்டு நிறை.}$$

7. 5 அடி நீளமும், 1 அடி உயரமுமுள்ள சாய்தளத்தின் உச்சியில் இருக்கும் உராய்வற்ற கப்பியின்மேல் செல்லும் இலேசான நூல் 10 பவுண்டு, 3 பவுண்டு திணிவுள்ள பொருள்களைச் சேர்க்கிறது. 10 பவுண்டு பொருள் சாய்தளத்தின் மேலுள்ளது. 3 பவுண்டு பொருள் தடங்கலின்றித் தொங்குகின்றது. நூலின் முடுக்கத்தையும், நூலின் இழுவிசையையும் கண்டுபிடிக்க.



படம் 50.

சாய்கோணம் ' α ' என்ருல்

$\sin \alpha = \frac{1}{5}$

10 பவுண்டு நிறையின் சாய்தளத்தின் போக்கில் கூறு

$= 10g \times \sin \alpha$

$= 10g \times \frac{1}{5}$

$= 2g$ பவுண்டல்கள்.

சாய்தளத்தின்மேல் விளைவு விசை

$= T - 2g$ பவுண்டல்கள்

3 பவுண்டு நிறை கீழே தொங்கும்போது விளைவு விசை

$= 3g - T$ பவுண்டல்கள்

$3f = 3g - T$

$10f = T - 2g$

$\therefore \quad 13f = g$

$\therefore \quad f = \frac{32}{13}$ அடிகள்/(விநாடி)^2

$\therefore \quad T = 3g - 3f$

$= 96 - \frac{96}{13}$

$= \frac{96 \times 12}{13}$

$= \frac{1152}{13}$ பவுண்டல்கள்.

8. 150 டன் திணிவுள்ள இரயில் வண்டி, 100-ல் ஒன்று என்ற வீதத்திலுள்ள சாய்தளத்திற்கு மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் வருகிறது. எஞ்சினின் மாறிலி விசையினுல் வண்டி சாய்தளத்தின் உச்சியை அடைகிறது. சாய்தளத்தின் நீளம் 1 மைலாகும். பிறகு நீராவி நிறுத்தப்படுவதால், கிடைதளத்தின் மேல் $\frac{1}{2}$ மைல் ஓடி நிற்கிறது. தளத்தின் உராய்வு, காற்றின் தடை இவைகளின் கூட்டுத்தொகை டன்னுக்கு 8 பவுண்டு என்று கொண்டால், எஞ்சினின் விசையைக் கண்டுபிடிக்க.

தளத்தின் உராய்வு, காற்றின் தடை இவைகளினுல்

எதிர்விசை $= 150 \times 8g$ பவுண்டல்கள்

$= 1200g$ பவுண்டல்கள்

சாய்தளத்தின் போக்கில், வண்டியின் நிறையின் கூறு

$= 150 \times 2240 \times g \times \frac{1}{100}$

$= 3360 \times g$ பவுண்டல்கள்

எஞ்சின் விசை $= x$ டன் நிறை எனக் கொள்க.

$\therefore$ விளைவு விசை $= 3360g - 1200g + x \times 2240 \times g$

$= [2240x - 4560]g$

$P = mf$ என்பதால்

$$f = \frac{(2240x - 4560)\,g}{150 \times 2240}$$

$$= g\left[\frac{x}{150} - \frac{19}{1400}\right]$$

ஆரம்பத் திசைவேகம் $= 30$ மைல்/மணி

$= 44$ அடி/விநாடி

சாய்தளத்தின் உச்சியை அடையும்போது வண்டியின் திசைவேகம்

$= \sqrt{44^2 + 2 \times 1760 \times 3f}$

சாய்தளத்தின் உச்சியை அடைந்த பிறகு கிடைதளத்தில் வண்டி செல்லும்போது, வண்டியின் போக்குக்குத் தடை, தளத்தின் உராய்வு, காற்றின் தடை இவைகள் தான்.

∴ தடை விசை $= -1200g$

அப்போது முடுக்கம் $= \dfrac{12\cancel{00}g}{\underset{5}{\cancel{150}} \times 22\cancel{40}} = -\dfrac{g}{280}$

$\frac{1}{2}$ மைல் வண்டி ஓடிய பிறகு வண்டி நிற்கிறது.

$$\therefore \quad V = \sqrt{44^2 + 2 \times 3 \times 1760 \times f}$$

$$\left[f = g\left(\frac{x}{150} - \frac{19}{1400}\right)\right]$$

$$V = 0$$

$$f' = -\frac{g}{280}$$

$$s = \frac{1}{2} \text{ மைல்}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{4}{\cancel{8}} \times 220 \times 3$$

$$= 3 \times 880$$

$$0 = 44^2 + 6 \times 1760 \times f - \frac{2 \times g}{280} \times 3 \times 880$$

$$10560f = \frac{2 \times \overset{8}{\cancel{32}} \times 3 \times 880}{\underset{7}{\cancel{280}}} - 44_4 \times 4$$

$$= \frac{176}{7}\,[24 - 77]$$

$$= -\frac{176 \times 53}{7}$$

$$10560 \times 32 \left[\frac{x}{150} - \frac{19}{1400}\right]$$

$$= -\frac{176 \times 53}{7}$$

$$\frac{x}{150} - \frac{19}{1400} = -\frac{\overset{11}{\cancel{176}} \times 53}{7 \times 10560 \times \underset{2}{\cancel{32}}}$$

$$\frac{x}{150} = \frac{19}{1400} - \frac{\overset{53}{\cancel{583}}}{14 \times \underset{960}{\cancel{10560}}}$$

$$= \frac{19\times96-53\times10}{96\times1400}$$

$$= \frac{1824-530}{96\times1400}$$

$$= \frac{1294}{96\times1400}$$

$$\therefore\quad x = \frac{\overset{647}{\cancel{1294}}}{\underset{16}{\cancel{96}}\times\underset{28}{\cancel{1400}}}\times\cancel{150}$$

$$= \frac{647}{448} \text{ டன்கள்.}$$

9. இலேசான நிலையான கப்பியின்மேல் செல்லும் நூல், 5 பவுண்டு, 7 பவுண்டு திணிவுள்ள இலேசான நகரும் கப்பிகளை, நுனிக்கு ஒன்ருக இணைத்திருக்கிறது. நகரும் முதல் கப்பியின்மேல் 3 பவுண்டு, 4 பவுண்டு திணிவுகளைச் சேர்க்கும் நூல் செல்லுகிறது. இரண்டாவது கப்பியின் மேல் 2 பவுண்டு, 3 பவுண்டு திணிவுகள் நகரும் கப்பிகள், திணிவுகள் இவைகளின் முடுக்கங்களைக் கண்டு பிடிக்க.

படம் 51.

B கப்பியின் முடுக்கம் $=$ C கப்பியின் முடுக்கம் என்க.

B கப்பியே நகருவதால், $2g$-ன் முடுக்கம், $3g$-ன் முடுக்கத்திற்குச் சமமன்று. ஆனல் B கப்பியைப் பொறுத்து,

$2g$-ன் முடுக்கம் $=$ $3g$-ன் முடுக்கம்.

B கப்பியிலுள்ள $2g$-ன் முடுக்கம் f_1, $3g$-ன் முடுக்கம் f_2 என்றும், C கப்பியிலுள்ள $3g$-ன் முடுக்கம் f_3, $4g$-ன் முடுக்கம் f_4 என்றும் கொள்க.

B, C கப்பிகள், மற்றத் துகள்களின்மேல் விளைவு விசைகள் வருமாறு :

B கப்பியின் மேல் $= T-2T_1-7g$ மேல்நோக்கி

C கப்பியின் மேல் $= 2T_2+5g-T$ கீழ்நோக்கி

B-லுள்ள 2 பவுண்டு திணிவின் மேல் $= T_1-2g$ மேல்நோக்கி

B-லுள்ள 3 பவுண்டு திணிவின் மேல் $= 3g-T_1$ கீழ்நோக்கி

C-லுள்ள 3 பவுண்டு திணிவின் மேல் $= T_2-3g$ மேல்நோக்கி

C-லுள்ள 4 பவுண்டு திணிவின் மேல் $= 4g-T_2$ கீழ்நோக்கி

இந்த ஆறு விசைகளுக்கும் $P = mf$ என்ற சமன்பாட்டை உபயோகப்படுத்துக.

$$T-2T_1-7g = 7f \qquad \text{......(1)}$$

$$2T_2+5g-T = 5f \qquad \text{......(2)}$$

$$T_1-2g = 2f_1 \qquad \text{......(3)}$$

$$3g-T_1 = 3f_2 \qquad \text{......(4)}$$

$$T_2-3g = 3f_3 \qquad \text{......(5)}$$

$$4g-T_2 = 4f_4 \qquad \text{......(6)}$$

மேலும் ஒரு கப்பியைப் பொறுத்து. அதன் இரு பக்கமுடுக்கங்களும் சமம்.

$$f_1-f = f+f_2 \qquad \text{......(7)}$$

$$f_3+f = f_4-f \qquad \text{......(8)}$$

$$(3)+(4) \quad 2f_1+3f_2 = g \qquad \text{......(9)}$$

$$(5)+(6) \quad 3f_3+4f_4 = g \qquad \text{......(10)}$$

$$(1)+(2) \quad 2T_2-2T_1-2g = 12f \qquad \text{......(11)}$$

$$(3)-(4) \quad 2T_1-5g = 2f_1-3f_2$$

$$\therefore 2T_1 = 5g+2f_1-3f_2 \qquad \text{......(12)}$$

$$(5)-(6) \quad 2T_2-7g = 3f_3-4f_4$$

$$2T_2 = 7g+3f_3-4f_4 \qquad \text{......(13)}$$

(12), (13)-லிருந்து T_1, T_2-ன் மதிப்புகளை உபயோகித்தால்

$$7\cancel{g}+3f_3-4f_4-5\cancel{g}-2f_1+3f_2-2\cancel{g}=12f$$

$$-2f_1+3f_2+3f_3-4f_4 = 12f \qquad \text{......(14)}$$

$$(7)\text{-லிருந்து } f_1 = 2f+f_2 \qquad \text{......(15)}$$

$$(8)\text{-லிருந்து } f_3 = f_4-2f \qquad \text{......(16)}$$

(9), (10), (14) சமன்பாடுகளில் (15), (16)-லிருந்து f_1, f_3 மதிப்புகளை உபயோகித்தால்

$$4f+2f_2+3f_2 = g$$

$$4f+5f_2 = g \qquad \text{......(17)}$$

$$3f_4-6f+4f_4 = g$$

$$7f_4-6f = g \qquad \text{......(18)}$$

$$-4f-2f_2+3f_2+3f_4-6f-4f_4 = 12f$$

$$f_2-f_4 = 22f \qquad \text{......(19)}$$

$$\therefore f_2 = 22f+f_4$$

∴ (17), சமன்பாடு

$$4f+110f+5f_4 = g$$

$$5f_4+114f = g \qquad \text{......(20)}$$

$(18)\times 5-(20)\times 7$

$$35f_4-30f-35f-798f = 5g-7g$$

$$-828f = -2g$$

$$\therefore f = \frac{g}{414}$$

$$5f_4 = g-114f$$

$$= g-\frac{114g}{414}$$

$$= \frac{300g}{414}$$

$$f_4 = \frac{60g}{414} = \frac{30}{207}g$$

$$f_2 = 22\ \frac{g}{414}+\frac{60g}{414} \qquad \text{[from (19)]}$$

$$= \frac{82g}{414} = \frac{41g}{207}$$

$$f_1 = 2\cdot\frac{g}{414}+\frac{82g}{414} \qquad \text{[from (15)]}$$

$$= \frac{84g}{414} = \frac{42}{207}g$$

$$f_3 = \frac{60g}{414}-2.\frac{g}{414} \qquad \text{[from (16)]}$$

$$= \frac{58g}{414} = \frac{29}{207}g$$

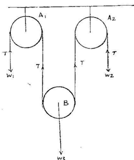
10. கிடைதிசையிலுள்ள ஒரு நேர்கோட்டில் A_1, A_2 என்ற இரு கப்பிகள் உள்ளன. A_1, A_2 என்ற கப்பிகளின்மேல் செல்லும் இலேசான நூல் அந்த ஒரு முனையில் W_1 என்ற நிறையும், மற்றொரு முனையில் W_2 என்ற நிறையும் கொண்டிருக்கிறது. W_3 என்ற நிறையை ஏந்தும் B என்ற மூன்ருவது கப்பி, A_1, A_2-க்கு இடையேயுள்ள நூலில் தொங்குகிறது. A_1, A_2 இவைகளைச் சமீபமாக வைத்து, தொங்கும் நூலின் பகுதிகளில் எல்லாம் நிலைதிசையில் உள்ளதாகக் கொள்க.

எல்லா நிறைகளும் நகர்ந்துகொண்டிருக்கும் போது, நூலின் இழுவிசையைக் கண்டுபிடிக்க.

W_1, W_2 என்ற நிறைகள் நகரும்போது, W_3 நிறைநிலையில் இருப்பதற்கான நிபந்தனை

$$4W_1 W_2 = W_3 (W_1 + W_2)$$

என்று நிரூபிக்க.



படம் 52.

W_1, W_2 என்ற நிறைகள் கீழ்நோக்கி முறையே x_1, x_2 தூரங்கள் நகர்ந்தால் சமச்சீர் முறைப்படி W_3, $\frac{x_1+x_2}{2}$ மேல்நோக்கி நகரும்.

அதேபோல் W_1, கீழ்நோக்கி x_1 தூரம், W_2 மேல்நோக்கி x_2 தூரம் நகர்ந்தால், $W_3 \frac{x_1-x_2}{2}$ தூரம் மேல்நோக்கி நகரும். மேலும் f_1, f_2, f_3 என்பவை முறையே W_1, W_2, W_3 என்பவைகளின் முடுக்கங்களானல்

$$f_3 = \frac{f_1+f_2}{2}$$

W_1 கீழ்நோக்கி நகருவதாகவும், W_2, W_3 மேல்நோக்கி நகருவ தாகவும் கொள்ளுவோம்.

$$W_1 - T = \frac{W_1}{g} f_1 \quad \ldots\ldots(1)$$

$$T - W_2 = \frac{W_2}{g} f_2 \quad \ldots\ldots(2)$$

$$2T - W_3 = \frac{W_3}{g} f_3 \quad \ldots\ldots(3)$$

f_1 கீழ்நோக்கிய முடுக்கமாகவும், f_2, f_3 என்பவை மேல்நோக்கிய முடுக்கங்களாகவும் இருப்பதால்

$$f_3 = \frac{f_1-f_2}{2} \quad \ldots\ldots(4)$$

∴ (3) சமன்பாடு

$$2T - W_3 = \frac{W_3}{g}\left[\frac{f_1-f_2}{2}\right] \quad \ldots\ldots(5)$$

$$\frac{4T}{W_3} - 2 = \frac{1}{g}\,[f_1-f_2] \quad \ldots\ldots(6)$$

$$= 1 - \frac{T}{W_1} - \frac{T}{W_2} + 1$$

$$= 2 - \frac{T}{W_1} - \frac{T}{W_2}$$

$$\therefore\ T\left[\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \frac{4}{W_3}\right] = 4$$

$$\therefore\ T = \frac{4}{W_1^{-1} + W_2^{-1} + 4W_3^{-1}}$$

W_3 நகராமலிருந்தால் $f_3 = 0$ ஆகும்.

∴ (3)-லிருந்து $2T - W_3 = 0$

$$\therefore\ W_3 = 2T$$

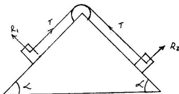
$$= \frac{8}{\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \frac{4}{W_3}}$$

$$W_3\,\frac{W_1+W_2}{W_1W_2} + 4 = 8$$

$$\therefore\ W_3\,(W_1+W_2) = 4W_1W_2$$ ஆகிறது.

11. முக்கோண வடிவமான 'M' திணிவுள்ள ஓர் ஆப்பு வழுவழுப்பான கிடைதிசையிலுள்ள மேஜையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. முக்கோணத்தின் உச்சியிலுள்ள ஒரு கப்பியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு இலேசான நூலின் ஒரு முனையில் m திணிவும், மற்றொரு முனையில் $2m$ திணிவுள்ள இரு துகள்கள் ஆப்புடன் வழுவழுப்பான இரு பக்கங்களிலும், பக்கத்திற்கு ஒன்றாக உள்ளன. ஆப்பின் இரு பக்கங்களும், கிடைதிசையுடன் 'α' கோணத்தை உண்டாக்குகின்றன. ஆப்பின் முடுக்கம், மற்றும் துகள்களின் முடுக்கம் இவைகளைக் கண்டுபிடிக்க.

ஆப்பின் முடுக்கம் F என்க. $2m$ திணிவின் முடுக்கத்தைச் சாய்தளத்தின் போக்கில் f_1 என்றும் அதற்கு நேர்குத்துத் திசையில் f_2 என்றும் கூறுபோடுக. அதேபோல் 'm' திணிவின் முடுக்கத்தை f_3, f_4 என்று கூறு போடுக.



படம் 53.

இரண்டு சாய்தளங்களின் எதிர்வினைகள் R_1, R_2 என்க. நூலின் இழுவிசையை T என்று கொள்க.

சாய்தளங்களுக்கு நேர்குத்துத் திசையில் திணிவுகளின் விளைவு விசைகள்

$2mg\ \cos\alpha - R_1$, $R_2 - mg\ \cos\alpha$ என்றாகும். எனவே, அந்தத் திசையில் இயக்கத்தைக் கவனிக்கும்போது

$$2mf_2 = 2mg\cos\alpha - R_1 \quad \text{......(1)}$$

$$mf_4 = R_2 - mg\cos\alpha \quad \text{......(2)}$$

$2m$, m திணிவுகள் தளங்களுடன் தொடர்புகொண்டிருப்பதால் $f_2 = f_4 = F\ \sin\alpha$ என்றாகிறது.

M திணிவுள்ள ஆப்பின் இயக்கத்தைக் கவனிக்கும்போது

$$MF = R_1 \sin\alpha - R_2 \sin\alpha.$$
$$= \sin\alpha\,[2mg \cos\alpha - 2mf_2]$$
$$- \sin\alpha\,[mf_4 + mg \cos\alpha]$$
$$= m \sin\alpha\,[-g \cos\alpha - 2F \sin\alpha - F \sin\alpha]$$
$$F\,[M + 3m \sin^2\alpha] = mg \sin\alpha \cos\alpha$$
$$\therefore \quad F = \frac{mg \sin\alpha \cos\alpha}{M + 3m \sin 2\alpha}$$
$$f_2 = f_4 = F \sin\alpha$$
$$= \frac{mg \sin^2\alpha \cos\alpha}{M + 3m \sin^2\alpha}$$

சாய்தளங்களின் போக்கில் $2m$, m திணிவுகளின் இயக்கங்களை நோக்கும்போது

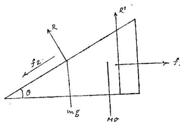
$$2mf_1 = 2mg \sin\alpha - T$$
$$mf_3 = T - mg \sin\alpha.$$
$$\therefore \quad 2mf_1 + mf_3 = mg \sin\alpha.$$

சாய்தளங்களின் போக்கில், முடுக்கங்களின் கூறுகள்

$$f_1 + F \cos\alpha = f_3 + F \cos\alpha.$$
$$\therefore \quad f_1 = f_3$$
$$\therefore \quad 3mf_1 = mg \sin\alpha.$$
$$f_3 = f_1 = \frac{g \sin\alpha}{3}$$
$$\therefore \quad T = 2mg \sin\alpha - 2m.\, \frac{g \sin\alpha}{3}$$
$$= \frac{4mg \sin\alpha}{3}$$

12. M திணிவுள்ள ஒரு வழுவழுப்பான ஆப்பு கிடைசமதளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. சாய்பக்கத்தின் மேல் m திணிவுள்ள பொருள் நழுவுகிறது. சாய்பக்கம் கிடைதளத்துடன் 'θ' கோணத்தை உண்டாக்குகிறது.

அப்படியென்றால், (1) ஆப்பின் முடுக்கம் (2) ஆப்புக்கும் பொருளுக்கும் இடையே உள்ள எதிர்ச்செயல் (3) ஆப்புக்கும் கிடைதளத்துக்கு மிடையே உள்ள எதிர்ச்செயல் இவைகளைக் கண்டுபிடிக்க.



படம் 54.

ஆப்பு வலக்கைப்பக்கம் f_1 என்ற முடுக்கத்துடன் கிடைதளத்தின் மேல் நகருவதாகக் கொள்ளுவோம்.

ஆப்பைப் பொறுத்து, m திணிவுள்ள பொருள் சாய்தளத்தின்மேல் கீழ்நோக்கி f_2 என்ற முடுக்கத்துடன் நகரட்டும்.

எனவே, m திணிவுள்ள பொருளின் உண்மையான முடுக்கம் f_1, f_2 என்பவைகளின் விளைவு முடுக்கமே.

∴ சாய்தளத்தின் போக்கில் பொருளின் முடுக்கம் $f_2 - f_1 \cos\theta$ என்றும் அதற்கு நேர்குத்துத் திசையில் $f_1 \sin\alpha$ என்றும் ஆகிறது.

∴ பொருளின் இயக்கச் சமன்பாடுகள்

$$m(f_2 - f_1\cos\theta) = mg\sin\theta \quad \text{......(1)}$$

$$m f_1 \sin\theta = mg\cos\theta - R \quad \text{......(2)}$$

ஆப்பின் இயக்கச் சமன்பாடுகள், கிடைதிசை, நிலைதிசை இவைகளில்

$$Mf_1 = R\sin\theta \quad \text{......(3)}$$

$$0 = Mg + R\cos\theta - R' \quad \text{......(4)}$$

(2) $\sin\theta$ + (3)

$$f_1[m\sin^2\theta + M] = mg\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore f_1 = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{m\sin^2\theta + M}$$

$$f_2 = g\sin\theta + \frac{\cos\theta \, mg\sin\theta\cos\theta}{m\sin^2\theta + M}$$

$$= \frac{mg\sin^3\theta + M\sin\theta + mg\sin\theta\cos^2\theta}{m\sin^2\theta + M}$$

$$= \frac{mg \sin\theta + Mg \sin\theta}{m \sin^2\theta + M}$$

$$= \frac{m+M}{m \sin^2\theta + M} \quad g \sin\theta$$

$$R = \frac{M}{\sin\theta} \quad \frac{mg \sin\theta \cos\theta}{m \sin^2\theta + M}$$

$$= \frac{mg\, M \cos\theta}{m \sin^2\theta + M}$$

$$R' = Mg + \frac{M\, mg \cos^2\theta}{m \sin^2\theta + M}$$

$$= \frac{M\, mg + M^2 g}{m \sin^2\theta + M} = \frac{(M+m)Mg}{m \sin^2\theta + M}$$

13. டன்னுக்கு 20 பவு. நிறை அளவுள்ள தடைக்கு எதிராக 300 டன் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டியை மணிக்கு 30 மைல் சீரான வேகத்தில் கிடைதளத்தில் செலுத்தும் எஞ்சினின் குதிரைத் திறனைக் கண்டுபிடி.

வேகம் சீராக உள்ளதால், எஞ்சினின் இழுப்புச் சக்தி, வண்டியின் தடைக்குச் சமமாகும்.

∴ அதன் அளவு $= 300 \times 20$

$= 6000$ பவு. நிறை

வேகம் 30 மைல்/மணி $= 44$ அடி/விநாடி

∴ செய்யப்பட்ட வேலை $= 6000 \times 44$

∴ குதிரைத் திறன் $= \dfrac{\overset{120}{\cancel{6000}} \times \cancel{44}}{\underset{5}{\cancel{550}}}$

$= 480$

14. 50-ல் 1 என்ற சாய்வுள்ள ஒரு தளத்தின்மேல் டன்னுக்கு 20 பவு. நிறை அளவுள்ள தடைக்கு எதிராக 200 டன் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டியை, மணிக்கு 60 மைல் சீரான வேகத்துடன் ஓட்டிச் செல்லும் எஞ்சினின் குதிரைத் திறனைக் கண்டுபிடி.

தடை $= 200 \times 20$

$= 4000$ பவு. நிறை

இரயில் வண்டியின் நிறையின் கூறு சாய்தளத்தின் போக்கில்

$= 200 \times \frac{1}{50}$

= 4 டன்கள்

= 8960 பவு. நிறை

வேகம் சீரானதால், எஞ்சினின் இழுப்புச் சக்தி இயக்கத்துக்குத் தடை, வண்டியின் நிறையின் கூறு இவைகளுக்குச் சமமாகும்.

∴ எஞ்சினின் இழுப்புச் சக்தி $= 8960 + 4000$

$= 12,960$ பவு. நிறை

வேகம் $= 60$ மைல்/மணி

$= 88$ அடி/வினாடி

∴ வினாடியில் செய்யப்படும் வேலை $= 12,960 \times 88$

∴ குதிரைத் திறன் $= \frac{12960 \times 88}{550}$ (8, 5 cancelled)

$= \frac{10368}{5}$

$= 2073 \cdot 6$

15. 300 குதிரைத் திறனுள்ள ஒரு எஞ்சின் 200 டன் திணிவுள்ள ஓர் இரயில் வண்டியை 200-ல் 1 என்றவளவிலுள்ள, சாய்தளத்தின்மேல் இழுத்துச் செல்லுகிறது. அதற்கானத் தடை 1 டன் திணிவுக்கு 5 பவு. அளவிலுள்ளது. சீரான அதிகபட்ச வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

வினாடிக்கு எஞ்சின் செய்யும் அதிகபட்ச

வேலை $= 300 \times 550$

$= 165000$ அடி பவு.

இயக்கத்துக்கு எதிரான தடையின் அளவு $= 200 \times 5$

$= 1000$ பவு. நிறை

சாய்தளத்தின் போக்கில் வண்டியின்

நிறையின் கூறு $= 200 \times \frac{1}{200} \times 2240$

$= 2240$ பவு. நிறை

வேகம் சீராக இருப்பதால், எஞ்சினின் இழுப்புச் சக்தி, இயக்கத்துக்கு எதிரான தடை, வண்டியின் நிறையின் கூறு இவைகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம்.

∴ இழுப்புச் சக்தி $= 1000 + 2240$

$= 3240$ பவு. நிறை

வேகம் V அடி/விநாடி என்ருல்

விநாடியில் செய்யும் வேலையின் அளவு $= 3240 \times V$ அடி. பவு.

$$\therefore\ 3240\ V = 330 \times 550$$

$$V = \frac{\overset{275}{330 \times 550}}{\underset{162}{3240}}$$

$$= \frac{9075}{162} \text{ அடி/விநாடி}$$

$$= \frac{9075}{162} \times \frac{60}{88} = \frac{12375}{324}$$

$$= 38\frac{63}{324} \text{ மைல்/மணி}$$

16. 40–ல் 1 என்றவளவிலுள்ள சாய்தளத்தில் கீழ்நோக்கி 5 டன் நிறையுள்ள வண்டி, மணிக்கு 12 மைல் என்ற மாறிலி வேகத்தில், தடையின்றி ஓடிக்கொண்டிருக்கிறது. கீழ்நோக்கிச் செல்லுவதற்குப் பதில், மேல்நோக்கிச் செல்லவேண்டுமாளுல், அதற்கான குதிரைத் திறனைக் கண்டுபிடி.

[இரண்டு இயக்கங்களிலும் உராய்வுத்தடை சமமெனக் கொள்க.]

வண்டியின் வேகம் மாறிலியாதலால், உராய்வுத் தடை = வண்டியின் நிறையின் கூறு.

$$= 5 \times \frac{1}{40} = \frac{1}{8} \text{ டன் நிறை}$$

$$= \frac{2240}{8} = 280 \text{ பவு. நிறை}$$

வண்டி மேல் செல்லும்போது, எஞ்சினின் இழுப்புச் சக்தி

$$= 280 + 280 = 560 \text{ பவு. நிறை.}$$

$$\text{வேகம்} = 12 \text{ மைல்/மணி}$$

$$= \frac{12 \times 88}{\underset{5}{60}}$$

$$= \frac{88}{5} \text{ அடி/விநாடி}$$

$$\therefore \text{ விநாடியில் செய்யப்பட்ட வேலை} = \overset{112}{560} \times \frac{88}{5}$$

$$= 9856 \text{ அடி. பவு.}$$

∴ குதிரைத் திறன் $= \frac{\overset{896}{9856}}{\underset{50}{550}}$

$= 17{\cdot}92$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. ஒரு பொருளின்மீது 10 விநாடிகள் விடாது, 1 கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஓர் அழுத்தம் செலுத்தப்படுகிறது. அந்த நேரத்தில் பொருள் 10 மீட்டர் தூரம் நகருகிறது. பொருளின் திணிவு 49·05 கிராம்களெனக் காண்பி.

2. 9 பவுண்ட் நிறையுள்ள கிடைதிசையுள்ள ஓர் அழுத்தம், வழு வழுப்பாகக் கிடைதளத்தில் நகரும்படி ஒரு பொருளின்மீது செலுத்தப் படுகிறது. 25 அடிகள் தூரம் நகர்ந்தபிறகு பொருள் 10 அடி/விநாடி திசைவேகம் அடைகிறது. பொருளின் திணிவு 144 பவுண்ட்களெனக் காண்பி.

3. 200 டன்கள் திணிவுள்ள ஒரு பொருளின் மீது 1,12,000 பவுண்டல்கள் அளவுள்ள விசை செலுத்தப்படுகிறது. பொருள், மணிக்கு 30 மைல்கள் திசைவேகம் அடைய எவ்வளவு நேரம் பிடிக்குமெனக் கண்டுபிடி.

4. 10 பவுண்டல்கள் திணிவுள்ள ஒரு பொருள் 10 அடி உயரத்தி லிருந்து நிலைதிசையில் விழுகிறது. பூமியிலுள்ள மணலில் 1 அடி தூரம் சென்று பொருள் ஓய்வடைகிறது. மணலின் மாறிலியான அழுத்தத்தைக் கண்டுபிடி.

5. விநாடிக்கு 200 அடிகள் திசைவேகத்துடன் நகரும் குண்டு ஒரு மரத்தைத் தாக்கி, 9 அங்குல தூரம் செல்லுகிறது. அதே திசைவேகத் துடன் மற்றொரு குண்டு, 5 அங்குலக் கனமுள்ள அதேமாதிரி மரத்தைத் தாக்குகிறது. மரத்தைவிட்டு வெளி வரும்போது குண்டின் திசை வேகம் என்ன?

6. 12 பவுண்ட்கள் திணிவுள்ள ஒரு பொருளின் மீது, 6 பவுண்ட் நிறையுள்ள விசை செலுத்தப்பட்டால், பொருளுக்குண்டாகும் முடுக்கத் தைக் கண்டுபிடி.

7. 100 டன்கள் திணிவுள்ள ஒரு பொருளின் மீது, 70 பவுண்ட் நிறையுள்ள விசை செலுத்தப்பட்டால், பொருள் மணிக்கு 15 மைல் திசைவேகம் அடைய எவ்வளவு நேரம் பிடிக்குமெனக் கண்டுபிடி.

8. 112-க்கு 1 என்ற விதத்தில் சாய்ந்திருக்கும் தளத்தில் கீழ் நோக்கி ஒரே சீரான திசைவேகத்துடன் ஓடும் ஒரு மோட்டார்வண்டி, மணிக்கு 10 மைல் திசைவேகத்துடன், சாய்தளத்தின் கீழே இருந்து தொடங்கி மேல்நோக்கிச் சென்ருல், எவ்வளவு தூரம் ஓடி வண்டி நிற்கு மெனக் கண்டுபிடி.

9. 218 கிராம் திணிவுள்ள ஒரு பொருளின் மீது 10 கிராம் நிறைக்குச் சமமான விசை, 5 செகண்டுகள் செலுத்தப்படுகிறது. பொருளில் உண்டாகும் திசைவேகம், 5 செகண்டுகளில் பொருள் நகரும் தூரம் இவைகளைக் கண்டுபிடி.

10. ஓர் இரயில் வண்டியின் இயக்கத்துக்குத் தடையான எதிர் விசை டன்னுக்கு 14 பவுண்ட் நிறை என்ற விதத்திலுள்ளது. கிடை தளத்தின் மீது மணிக்கு 50 மைல் வேகத்தில் ஓடும் வண்டி, 150-ல் 1 என்ற சாய்வுள்ள தளத்தை வந்தடைகிறது. வந்தடைந்தவுடன் நீராவி நிறுத்தப்பட்டால், சாய்தளத்தின்மேல் வண்டி எவ்வளவு தூரம் ஓடி நிற்கும்?

11. 150 பவுண்ட் திணிவுள்ள நிறையை உடைய ஒரு மனிதன், 12 அடி/(விநாடி)^2 என்ற சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்கும் மேல்தூக்கி யின்(lift) மேல் நிற்கிருன். மேல்தூக்கியின்மீது மனிதன் உண்டாக் கும் எதிர்விசையை (1) மேலே செல்லும்போது (2) கீழே செல்லும் போது கண்டுபிடி.

12. 160 டன்கள் திணிவுள்ள ஓர் இரயில்வண்டி, ஒரு நிலையி லிருந்து புறப்படுகிறது. எஞ்சின் இழுப்புச் சக்தி, அதன் போக்குக்குச் செய்யும் தடையைவிட $2\frac{1}{2}$ டன்கள் விசை அளவுள்ளது. இந்த சாதக மான போக்குடன் வண்டி நகர்ந்து, மணிக்கு $37\frac{1}{2}$ மைல் வேகமடை கிறது. இப்போது இந்தச் சீரான திசைவேகம் மாருமல் கொஞ்சத் தூரம் ஓடுகிறது. மின்வண்டியின் பிரேக்குகள் $2\frac{1}{2}$ அடி/(விநாடி)^2 என்ற எதிர்முடுக்கத்தை உண்டாக்கி, 5 மைல்கள் வண்டி ஓடி நிற்கிறது.

முடுக்கத்துடன் வண்டி ஓடும்போது ஆகும் நேரம், எதிர்முடுக்கத் துடன் ஓடும்போது ஆகும் நேரம், வண்டியின் மொத்த ஓட்டத்துக்கு ஆகும் நேரம் இவைகளைக் கண்டுபிடி.

13. நிலைதிசையில் நகரும் கிடைதளத்தின் மேல் m பவுண்டுகள் திணிவுள்ள ஒரு பொருள் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. தளத்தின்மேல் பொருளின் அழுத்தம் m பவுண்ட் நிறைக்குச் சமமாளுல், கிடை தளத்தின் முடுக்கத்தைக் கண்டுபிடி.

14. நிலை திசையில் கீழே இறங்கும் 9 பவுண்டுகள் திணிவுள்ள ஒரு பொருள், உராய்வற்ற கப்பியின்மேல் செல்லும் ஒரு நூலின்மூலம்

6 பவுண்டுகள் திணிவுள்ள மற்றொரு பொருளை மேல்நோக்கி இழுக்கிறது. இரு பொருள்கள் சேர்ந்த தொகுதியின் முடுக்கத்தையும், நூலின் இழுவிசையையும் கண்டுபிடி.

15. 3 பவுண்டுகள் நிறையுள்ள இரு திணிவுகள், உராய்வற்ற கப்பியின்மேல் செல்லும் ஒரு நூலினால் சேர்க்கப்பட்டிருக்கின்றன. 3 பவுண்டு நிறையுள்ள மூன்றாவது திணிவு, ஏதாவதொரு நிறையின் மீது வைக்கப்படும்போது, கப்பியின் மேல் உள்ள அழுத்தத்தைக் கண்டுபிடி.

16. ஓர் உராய்வற்ற கப்பியின்மேல் இரு நூல்கள் செல்லுகின்றன. அவைகள் கப்பியின் ஒரு பக்கத்தில் 3 பவு., 4 பவு. என்ற திணிவுகளைத் தாங்குகின்றன. மற்றொரு பக்கத்தில் 5 பவு., திணிவுள்ள ஒரே ஒரு பொருளைத் தாங்குகிறது. நூல்களின் இழு விசைகளையும், தொகுதியின் முடுக்கத்தையும் கண்டுபிடி.

17. உராய்வு கெழு $\sqrt{3}$ உடைய ஓர் உராய்வுடைய கிடைதளத் திலுள்ள மேஜையின்மீது p என்ற திணிவு வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதை $3p$ திணிவுடன் சேர்க்கும் நூல், மேஜையின் விளிம்பிலுள்ள கப்பியின்மேல் செல்லுகிறது. இப்போது இயக்கம் தொடங்குகிறது. தொடங்கி 5 விநாடிகளில் நூல் அறுந்து போகிறது. p மேஜையின் மேல் நகர்ந்து ஓய்வுறும் இடத்துக்கும், p முதலில் வைக்கப்பட்ட இடத்திற்குமிடையே உள்ள தூரம் 96 அடிகள் என்று காண்பி.

18. ஒரே திணிவுள்ள 16 பந்துகள் ஒரு நூலில் மணிகள்போல் கோக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவைகளில் சில, கிடைதளத்துடன் $\sin^{-1}(\frac{1}{4})$ கோணம் உண்டாக்கும் சாய்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. மற்றவை, சாய்தளத்தின் உச்சியிலிருந்து தொங்குகின்றன. முதலில் முடுக்கம் $\frac{g}{2}$ என்றால், தளத்தின்மேல் உள்ள பந்துகள் எவ்வளவு?

19. கிடைதளத்துடன் 30° கோணம் உண்டாக்கும் வழவழப்பான சாய்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கும் m என்ற திணிவு, சாய் தளத்தின் மேலுள்ள கப்பியின்மேல் செல்லும் நூலின் ஒரு முனையிலுள்ள நிலைக்குத்தாகத் தொங்கும் m' திணிவினால் இழுக்கப் படுகிறது.

தங்கு தடையின்றிக் கீழே விழும் பொருளுக்கான முடுக்கத்தில் நான்கில் ஒரு பங்குள்ள முடுக்கத்துடன் மேற்கண்ட தொகுதி நகருமானால், $\frac{m'}{m}$ என்பதின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

20. 120-ல் 1 என்ற சாய்வுள்ள தளத்தில் 200 டன்கள் திணிவுள்ள இரயில் வண்டி கீழ்நோக்கி மணிக்கு நாற்பது மைல் வேகத்தில் ஓடிக் கொண்டிருக்கிறது. $\frac{1}{2}$ மைலில் வண்டியை நிறுத்துவதற்கான தடையின் அளவு $5\frac{20}{77}$ டன் நிறைக்குச் சமமெனக் காண்பி.

21. h உயரமும் l நீளமும் உள்ள ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கும் m திணிவு, தளத்தின் உச்சியிலுள்ள கப்பியின் மேல் செல்லும் நூலில் கட்டி நிலைக்குத்தாகத் தொங்கும் 'm'' என்ற திணிவினால் மேலே இழுக்கப்படுகிறது. m திணிவுள்ள பொருள் $\left[\frac{m+m'}{m'}\frac{hl}{h+l}\right]$ தூரம் நகர்ந்த பிறகு நூல் அறுந்தால், m திணிவு, தளத்தின் உச்சியை அடையும் என்று நிரூபி.

22. 20 கிராம், 30 கிராம் நிறைகளுள்ள இரு துகள்களைச் சேர்க்கும் ஓர் இலேசான நூல், உராய்வற்ற கப்பியின்மேல் செல்லுகிறது. (1) அவைகளின் பொது முடுக்கம் (2) நூலின் இழுவிசை (3) கப்பியின் மேல் அழுத்தம் இவைகளைக் கண்டுபிடி.

23. வழவழப்பான கிடைதிசையிலுள்ள மேஜையின்மீது வைக்கப்பட்டிருக்கும் 9 பவுண்டு திணிவைச் சேர்க்கும் நூல், மேஜையின் விளிம்பிலுள்ள கப்பியின்மேல் சென்று 7 பவுண்டு திணிவைத் தடையின்றித் தொங்கச் செய்யும்படி அமைந்திருக்கிறது. (1) அவைகளின் பொதுமுடுக்கம் (2) நூலின் இழுவிசை (3) கப்பியின் மேல் அழுத்தம் இவைகளைக் கண்டுபிடி.

24. 6 அடி உயரமுள்ள கிடைத்தளத்திலுள்ள ஒரு வழவழப்பான மேஜையின் மீது, அதன் ஒரு விளிம்பிலிருந்து 18 அடி தூரத்தில் 5 பவுண்டு திணிவுள்ள பொருள் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது.

அந்த விளிம்பிலுள்ள 3 பவுண்டு திணிவுள்ள மற்றொரு பொருளை இந்தப் பொருளுடன் 18 அடி நீளமுள்ள இலேசான நூல் சேர்க்கிறது. விளிம்பிலுள்ள பொருளை இலேசாகத் தள்ளி, நிலைக்குத்தாகத் தொங்கும்படி செய்தால், அது பூமியைச் சென்றடைய எவ்வளவு நேரமாகும்? அதற்குப் பிறகு எவ்வளவு நேரம் கழித்து, 5 பவுண்டு திணிவுள்ள பொருள் விளிம்பை அடையும்?

25. 5 பவு. திணிவுள்ள ஒரு பொருள் உராய்வுள்ள ஒரு கிடைதிசையிலுள்ள மேஜையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதைத் தடங்கலின்றித் தொங்கும் 3 பவு. திணிவுள்ள மற்றொரு பொருளுடன் ஒரு நூல் இணைக்கிறது. மேஜையின் மேலுள்ள பொருளுக்கும் மேஜைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் கெழு $\frac{1}{3}$ என்றால் நூலின் இழுவிசையைக் கண்டுபிடி.

26. கிடைதிசையுடன் 45° கோணம் உண்டாக்கும் சாய்தளத்தின் உராய்வுக் கெழு $\frac{3}{4}$. அதன்மேல் ஒரு துகள் நழுவுகிறது. ஏதாவதொரு குறிப்பிட்ட தூரம் நகர்வதற்கான நேரம், அதே சாய்தளம் வழுவழுப்பாயிருந்தால் ஆகும் நேரத்தைப்போல் இரண்டு பங்கென நிரூபி.

27. 30°, 60° கோணங்களையுடைய உராய்வுள்ள ஓர் ஆப்பின் உச்சியில் ஒரு கப்பி வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. கப்பியின் பக்கங்களின் மேல் பக்கத்துக்கு ஒன்றாக உள்ள 4 பவு., 12 பவு. நிறைகளைச் சேர்க்கும் இலேசான நூல் கப்பியின்மேல் செல்லுகிறது. உராய்வுக் கெழு $\frac{1}{2}$ என்றால், விளைவு முடுக்கத்தைக் கண்டுபிடி.

28. ஒரு நூலின் நுனியில் கட்டித் தடங்கலின்றித் தொங்கும் W_1 நிறையுள்ள பொருள், கிடைதிசையிலுள்ள மேஜையின்மேல் W_2 நிறையுள்ள மற்றொரு பொருளுடன் நூலின்மூலம் சேர்க்கப்பட்டிருக்கிறது. இரண்டாவது பொருளுக்கும் மேசைக்கு மிடையே உள்ள உராய்வு கெழு μ ஆகும். மேஜையின் விளிம்பிலுள்ள உராய்வினால், நிலைதிசையில் தொங்கும் நூலின் இழுவிசை, கிடைதிசையிலுள்ள நூலின் பாகத்தின் இழுவிசையைப்போல் 'n' மடங்காகும். முடுக்கத்தையும் இழுவிசைகளின் அளவுகளையும் கண்டுபிடி. கிடைதிசையிலுள்ள நூலின் பாகத்தின் இழுவிசை W_2 என்றால் W_1-க்கும் W_2-க்கு மிடையே உள்ள சம்பந்தத்தைக் கண்டுபிடி.

29. 12 பவு., 8 பவு. நிறையுள்ள இரு கப்பிகளைச் சேர்க்கும் இலேசான நூல், அசையாத உராய்வற்ற கப்பியின்மேல் செல்லுகிறது. முதல் கப்பியின்மேல் செல்லும் ஓர் இலேசான நூலின் நுனிகளில் 3 பவு., 6 பவு. எடைகள் கட்டித் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றன. இரண்டாவது கப்பியின்மேல் செல்லும் நூலின் நுனிகளில் 4 பவு., x பவு. எடையுள்ள இரு பொருள்கள் தொங்குகின்றன. அசையாத கப்பியின்மேல் செல்லும் நூல் நழுவாது ஓய்வுற்று இருக்கவேண்டுமானால் 'x'-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி. அப்போது அந்த நூலின் இழுவிசையையும் கண்டுபிடி.

30. மேஜையின் விளிம்பிலுள்ள அசையாத கப்பியின்மேல் செல்லும் நூலின் ஒரு நுனியில் கட்டப்பட்டிருக்கும் M திணிவுள்ள ஒரு துகள் வழவழப்பான மேஜையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. நூலின் மற்றொரு நுனி 'm' திணிவுள்ள அசையும் கப்பியின் அடியில் சென்று ஓர் ஆணியில் கட்டப்பட்டிருக்கிறது. அசையும் கப்பி, $\frac{mg}{4M+m}$ என்ற முடுக்கத்துடன் கீழே நகருகிறது என்று நிரூபி.

[மேசைக்கு வெளியே உள்ள நூலின் பாகங்கள் நிலைதிசையில் உள்ளன எனக் கொள்க.]

31. A என்ற புள்ளியில் கட்டப்பட்டிருக்கும் ஒரு நூல் $2W$ நிறையைத் தாங்கிக் கொண்டிருக்கும் அசையும் கப்பியின் அடி வழியாகச் சென்று பிறகு C என்ற அசையாத கப்பியின்மேல் சென்று, W' என்ற நிறையை அதன் நுனியில் கட்டித் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. கப்பிகளுடன் சம்பந்தப்படாத நூலின் பாகங்கள் எல்லாம் நிலை திசையில் உள்ளன என்று கொண்டால், மொத்தத் தொகுதியின் முடுக்கத்தைக் கண்டுபிடி.

[கப்பிகளின் உராய்வுகள், திணிவுகள் இவைகளைத் தவிர்த்து நோக்குக.]

32. மேற்கண்ட கணக்கில் $2W$ நிறை இயங்கும் முடுக்கத்தைக் கண்டுபிடி.

33. M திணிவும், α கோணமுமுள்ள ஓர் ஆப்பு, கிடைதிசையில் உராய்வுள்ள ஒரு மேசையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. உராய்வுக் கெழு μ ஆகும். ஆப்பின் ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் m திணிவுள்ள ஓர் உராய்வற்ற துகள் உள்ளது. ஆப்பு நகரும் முடுக்கம்,

$$\frac{m \cos \alpha [\sin \alpha - \mu \cos \alpha] - \mu M}{m \sin \alpha [\sin \alpha - \mu \cos \alpha] + M} g \text{ என்று நிரூபி.}$$

34. வழுவழுப்பான மேசையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கும் m திணிவுள்ள பொருளைக் கட்டியிருக்கும் நூல், மேசையின் விளிம்பைத் தாண்டி, M திணிவுள்ள ஒரு கப்பியைத் தாங்கி, மேசையின் உயரத்திலுள்ள அசையாத உராய்வற்ற கப்பியின்மேல் சென்று, m' திணிவுள்ள மற்றொரு பொருளை நிலைதிசையில் தடையின்றித் தொங்கவிடுகின்றது. நூலின் இழுவிசையைக் கண்டுபிடி. m' ஓய்வுற்று இருக்க $M = \frac{4mm'}{2m - m'}$, என்று நிரூபி.

35. α கோணமுள்ள வழுவழுப்பான சாய்தளத்தின்மேல் α கோணமும், M திணிவுமுள்ள ஓர் ஆப்பு வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அப்போது ஆப்பின் மேல்பாகம் கிடைதிசையிலுள்ளது. அந்தக் கிடைதிசையிலுள்ள பாகத்தின்மேல் m திணிவுள்ள ஒரு துகள் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. துகளின் விளைவு முடுக்கம் $\frac{(M+m) g \sin^2\alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$ என்று காண்பி.

36. α கோணமும், M திணிவுமுள்ள ஓர் ஆப்பின் ஒரு பக்கம் வழுவழுப்பான கிடைதிசையிலுள்ள மேசையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. m திணிவுள்ள துகள் ஆப்பின் சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்டு நழுவுகிறது. இப்போது ஆப்பு நகராமலிருக்க $\frac{1}{2} mg \sin 2\alpha$ என்ற கிடை

திசை விசையை ஆப்பின்மேல் செலுத்தவேண்டுமென நிரூபி. மேலும் ஆப்புக்கும் மேசைக்குமிடையே உள்ள எதிர்விசை $(M+m\cos^2\alpha)g$ என்றும் நிரூபி.

37. வீட்டின் கூரையில் கட்டப்பட்டிருக்கும் ஒரு நூல் m திணிவுள்ள ஒரு கப்பியின் அடியில் சென்று, கூரையிலுள்ள அசையாத மற்றொரு கப்பியின்மேல் சென்று, தடங்கலின்றி நிலைதிசையில் தொங்கும் m' திணிவுள்ள ஒரு பொருளைத் தாங்கி நிற்கும். தொங்கும் நூலின் பாகங்கள் எல்லாம் நிலைதிசையிலேயே இருக்குமெனக் கொண்டு, m' திணிவின்மேல் நோக்கிய முடுக்கம் $\dfrac{2(m-2m')}{m+4m'}g$ எனக் காண்பி.

38. α கோணமும் M திணிவுமுள்ள ஓர் ஆப்பு வழுவழுப்பான கிடை திசையிலுள்ள மேசையின்மேல் இருக்கிறது. m திணிவுள்ள ஒரு பொருளை ஆப்பின் பக்கத்தின்மேல் இலேசாக வைத்து நழுவவிடவும். அந்தப் பொருள் 'h' நிலைதூரம் நகரும்போது, ஆப்பு $\dfrac{mh\cot\alpha}{m+M}$ கிடை தூரம் நகருமென நிரூபி.

39. எஞ்சின், அது இழுக்கும் பொருள் இவைகளின் நிறை 10 டன்கள் என்றும், உராய்வு முதலியவற்றால் ஏற்படும் தடையின் அளவு 10 பவு. என்றும் உள்ள ஓர் எஞ்சின் 100-ல் 1 என்ற அளவிலுள்ள சாய்தளத்தின்மேல் மணிக்கு 25 மைல் வேகத்தில் ஓடினால், எஞ்சினின் குதிரைத் திறனைக் கண்டுபிடி.

40. 2000 பவு. அளவுள்ள தடைக்கு எதிராக மணிக்கு 40 மைல் வேகத்தில் ஓடும் ஓர் இரயில் எஞ்சினின் குதிரைத் திறனைக் கண்டுபிடி.

41. நீட்டக்கூடிய ஒரு நூலை, விசையின் அளவை அதிகரித்து, நிதானமாக நீட்டவும். 2 அங்குலம் நீட்டியவுடன் அதன் இழுவிசை 10 பவு. நிறைக்குச் சமமாகிறது. நூலை நீட்டுவதற்கான வேலையின் அளவென்ன?

42. விநாடிக்கு 5 மீட்டர் திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் 10,000 கிராம்கள் நிறையுள்ள குண்டின் இயக்காற்றலைக் கண்டுபிடி.

43. 100, நான்கு பவுண்டு குண்டுகளை விநாடிக்கு 1200 அடிகள் திசைவேகத்துடன் ஒரு நிமிடம் செலுத்தும் துப்பாக்கியின் குதிரைத் திறனைக் கண்டுபிடி.

44. 60 டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி கிடை திசையில் ஓடிக்கொண்டிருக்கிறது. இயக்கத்துக்குத் தடையான விசை டன்னுக்கு 10 பவு. அளவிலிருக்கும் எஞ்சின் மாறிலி விசையைச் செலுத்

தும். கிளம்பிய 3 நிமிடங்களில், மணிக்கு 20 மைல்கள் திசைவேகம் உண்டாக வேண்டுமானல், எஞ்சினின் குதிரைத் திறனைக் கண்டுபிடி.

45. 400 அடி உயரத்திலிருந்து தடையின்றி விழும்போது உண்டாகும் திசைவேகத்துடன் மழை இயங்குவதாகக்கொண்டு, 24 மணி நேரத்தில் 3 அங்குல மழை பெய்வதால் தரைக்கு உண்டாகும் அழுத்தத்தை ஏக்கருக்கு எவ்வளவு பவுண்டல்கள் என்று கண்டுபிடி.

46. m பவு. திணிவுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி தனது நிறையைப்போல் k மடங்குக்குச் சமமான எதிர்முடுக்கத்துடன் இயங்கி, ஓய்விலிருந்து சீரான முடுக்கத்துடன் ஓடின பின், நீராவி நிறுத்தப்படுகிறது. புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து 'a' அடிகள் தூரத்திலுள்ள இரயில் நிலையத்தை 't' விநாடிகளில் சென்றடைகிறது. எஞ்சினின் மிக அதிக குதிரைத் திறன் $\dfrac{2\,mk^2\,gat}{550\,(kgt^2-2a)}$ என்று நிரூபி.

47. H குதிரைத் திறனுள்ள ஓர் எஞ்சின் M டன்கள் நிறையுள்ள இரயில் வண்டியை m-ல் 1 என்ற வீதத்திலுள்ள சாய்தளத்தின்மேல் இழுத்துச் செல்லுகிறது. அதன் இயக்கத்திற்கான தடையின் அளவு, டன்னுக்கு n பவு. நிறைக்குச் சமமாகும். வண்டியின் அதிகபட்ச வேகம் $\dfrac{550Hm}{m\,(2240+mn)}$ அடி/விநாடியெனக் காண்பி.

48. M திணிவுள்ள ஒரு பொருள் 'a' அடிகள் தடையின்றி நிலைதிசையில் விழுந்து பின், அதை அசையாத கப்பியின்மேல் செல்லும் நீட்ட இயலாத நூலின்மூலம் தன்னைவிட அதிகமான திணிவுள்ள M என்ற மற்றொரு பொருளை மேலே இழுக்கத் தொடங்குகிறது. $\dfrac{2M}{M'-M}\sqrt{\dfrac{2a}{g}}$ நேரத்தின் முடிவில் M' பொருள் தனது பழைய இடத்தையடைகிறதெனக் காண்பி.

49. சிறு கப்பியின்மேல் செல்லும் நூலின்மூலம், கீழே இறங்கிக்கொண்டிருக்கும் m_1 என்ற திணிவு, m_2 என்ற திணிவை மேலே இழுக்கிறது. இப்படி 10 விநாடிகள் இயங்கிய பின், m_2 என்ற திணிவின் மேல், m_3 என்ற திணிவுள்ள பொருள் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. 20 விநாடிகளில் M_2 திணிவு நகரும் மொத்தத் தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

50. கிடைதிசையுடன் $\tan^{-1}(\frac{7}{24})$ கோணமுள்ள ஓர் உராய்வுள்ள சாய்தளத்தின் மேலுள்ள 20 பவு. திணிவு ஓய்விலிருந்து ஆரம்பித்து 100 அடிகள் நகருகிறது. தளத்தின் உராய்வு கெழு 0·25 ஆகும். திணிவின்மேல் இயங்கும் விசைகள் செய்யும் வேலையை அடி பவுண்டல்களில் கண்டுபிடி. திணிவு அடையும் திசைவேகத்தையும் கண்டுபிடி.

51. 30,000 குதிரைத்திறன் பொருந்திய எஞ்சின்களையுடைய 30,000 டன் எடையுள்ள ஒரு கப்பல் மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. கப்பலின் போக்குத் தடையின் அளவை டன்னுக்கு எவ்வளவு என்று கண்டுபிடி.

52. 90 டன் நிறையும் 896 குதிரைத் திறனுமுள்ள ஓர் எஞ்சின் 120 டன் நிறையுள்ள இரயில் வண்டியை 84-ல் 1 என்ற வீதத்திலுள்ள சாய்தளத்தின்மேல் இழுத்துச் செல்லுகிறது. உராய்வுத் தடை டன்னுக்கு 80 பவு. என்ற அளவிலுள்ளது. வண்டி சாய்தளத்தின்மேல் ஓடும் சீரான அதிகபட்சத் திசை வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

53. $2\frac{1}{2}$ டன் நிறையுள்ள ஒரு வண்டி 50-ல் 1 என்ற வீதத்திலுள்ள சாய்தளத்தின்மேல் 2 அடி/(விநாடி)^2 என்ற முடுக்கத்துடன் ஓடுகிறது. அதன் இயக்கத்துக்கு எதிரான தடை டன்னுக்கு 30 பவு. நிறை என்ற அளவிலுள்ளது. வேகம் மணிக்கு 20 மைல் என்று இருக்கும்போது, வண்டியின் குதிரைத்திறன் என்ன ?

54. 'E' என்ற இயற்காற்றலுடன் ஒரு துகள், 'α' சாய்கோணம், μ உராய்வு கெழு என்றுள்ள சாய்தளத்தின்மேல் இயங்குகிறது. துகள் நிற்பதற்கு முன்னால் உராய்வு எதிராகச் செய்யும் வேலை $\dfrac{E\,\mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}$ என்று நிரூபி. துகள் நின்றபின், நகராமலிருப்பதற்கான நிபந்தனை என்ன ?

55. இரயில் நிலையத்திலிருந்து $\frac{1}{4}$ மைல் தூரம் இருக்கும்போது, மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் இரயில் வண்டி நிறுத்தப்படுகிறது. வண்டியின் நிறையில் $\frac{1}{100}$ பங்கு அளவுள்ள சீரான தடையினால் நிலையத்திற்கு வந்து வண்டி நிற்கிறது. மேற்கண்ட தடையுடன், வண்டியின் நிறையில் $\frac{1}{10}$ பங்கு அளவுள்ள சீரான பிரேக் செலுத்த முடிந்தால், இரயில் நிலையத்திற்கு எவ்வளவு தூரம் முன்னால் பிரேக்கைச் செலுத்தினால் வண்டி நிலையத்தில் வந்து நிற்கும் ?

56. 250 டன் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டியை டன்னுக்கு 12 பவு. நிறை அளவிலுள்ள தடைக்கு எதிராக மணிக்கு 35 மைல் வேத்தில் அதன் எஞ்சின் இழுத்துச்செல்ல முடியும். அதே வேகத்தில் 160-ல் 1 என்ற சாய்தளத்தின்மேல் இழுத்துச் செல்லுவதற்கான எஞ்சினின் குதிரைத்திறனைக் கண்டுபிடி.

57. ஓய்விலுள்ள 30 பவு. திணிவின்மேல் 5 பவு. நிறைக்குச் சமமான விசை 10 விநாடிகள் செயல்படுகிறது. திணிவு நகரும் தூரம், அது பிறப்பிக்கும் இயக்காற்றலின் அளவு இவைகளைக் கண்டுபிடி.

58. 120-ல் 1 என்ற சாய்தளத்தின்மேல் 300 திணிவுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி 0·5 அடி/(விநாடி)^2 என்ற முடுக்கத்துடன் செல்லுகிறது. மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தில் ஏற்படும் குதிரைத்திறன் 1225 என்ருல், பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியைத் தவிர்த்து, வண்டியின் இயக்கத்துக்கு எதிரான தடையின் அளவைக் கண்டுபிடி.

59. 10% சாய்வுள்ள தளத்தின்மேல் 2 டன் நிறையுள்ள ஒரு வண்டி $1\frac{1}{2}$ அடி/(விநாடி)^2 முடுக்கத்துடன் இயங்கிக்கொண்டிருக்கிறது. அந்த இயக்கத்திற்கு எதிரான தடை டன்னுக்கு 35 பவு. நிறை என்ற அளவிலுள்ளது. வண்டி மணிக்கு 25 மைல் வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும்போது, அதன் குதிரைத்திறன் என்ன?

60. 600 குதிரைத் திறனுள்ள ஓர் எஞ்சின் 250 டன் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டியை டன்னுக்கு 16 பவு. நிறை அளவிலுள்ள தடையையும் மீறி, கிடைதளத்தில் இழுத்துச் செல்லுகிறது. மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் வண்டி செல்லும்போது அதன் முடுக்கம் என்ன? அதே குதிரைத் திறனுடன், அதே அளவுத் தடையையும் மீறி 100-ல் 1 என்ற சாய்தளத்தின்மேல் செல்லும் இரயில் வண்டியின் சீரான வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

5. எறிபொருள்கள்
(Projectiles)

1. **முன்னுரை :** சென்ற அத்தியாயங்களில் நேர்கோடுகளில் அமையும் இயக்கங்களைப்பற்றி நாம் ஆராய்ந்தோம். உதாரணமாக, துகள் நிலைக்குத்தாக மேலே எறியப்படும்போதோ அல்லது, சாய்தளத்தின்மேல் அதன் மிக அதிகச் சரிவிலுள்ள நேர்கோட்டின் போக்கில் எறியப்படும்போதோ, நேர்கோடுகளில் இயக்கம் அமைகிறது. ஆனால், இந்த அத்தியாயத்தில், திசைவேகம் எந்தத் திசையிலும் அமையும் படி துகள் காற்றில் எறியப்பட்டாலும், அதன் இயக்கத்தை நாம் கவனிப்போம். இப்படிப்பட்ட துகளை **எறிபொருள்** எனலாம். எறிபொருளின்மேல் இயங்கும் விசைகள் அதன் நிறையும், காற்றின் தடையுமாகும்.

நாம் ஆராயும் எறிபொருள் பூமியின் மேற்பரப்புக்கு வெளியே அதிகத் தூரம் செல்லாதவாறு எடுத்துக்கொள்வோம். அப்போது புவிஈர்ப்பினால் ஏற்படும் முடுக்கம் ஏறக்குறைய மாறிலியாக இருக்கு மென எடுத்துக்கொள்ளலாம். மேலும் காற்றின் தடையைத் தவிர்த்து வெற்றிடத்தில் இயக்கம் நிகழ்வதாகக் கொள்வோம்.

2. **வரையறைகள் :** (1) **வீச்சுக்கோணம்** (Angle of Projection): வீச்சுப் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்துடன் (Horizontal plane) துகள் முதலாவதாக எறியப்படும் திசை உண்டாக்கும் கோணத்தை வீச்சுக் கோணம் என்கிறோம்.

(2) **எறிபொருளின் பாதை** (Trajectory): துகள் எறியப்படும் போது அதன் இயங்கும் பாதையை எறிபொருளின் பாதை எனலாம்.

(3) **வீச்சுத் திசைவேகம்** (Velocity of Projection) என்பது துகள் எறியப்படும் திசைவேகத்தைக் குறிக்கும்.

(4) **வீச்செல்லை (Range):** வீச்சுப்புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்தின்மேல் வீச்செல்லை என்பது, வீச்சுப்புள்ளிக்கும், எறி பொருள் பாதை, மீண்டும் சமதளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரமேயாகும்.

(5) **பறக்கும் நேரம் (Time of Flight):** எறியும் கணத்தி லிருந்து, வீச்சுப்புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்தை துகள் மீண்டும் சந்திக்கும்வரை உள்ள நேர் இடைவெளியே, பறக்கும் நேரமாகும்.

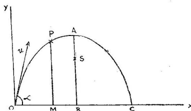
குறிப்பு: பூமி தன்பக்கம் துகளை ஈர்க்காமலிருந்தால், காற்றில் எறியப்படும் துகள், நேர்கோட்டில் மேல்நோக்கியே செல்லும். ஆனால், பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் உண்டாகும் கீழ்முக (Downward) முடுக்கமே, துகளை வளைகோட்டுப் பாதையில் நகரச்செய்கிறது. அந்த வளைகோட்டுப்பாதை ஒரு பரவளைவே என்பதை இப்போது நிரூபிப்போம்.

முதலில் எறிபொருளின் இயக்கத்தைப்பற்றி ஆராயப் புகும்போது, இயக்கத்தின் கிடைநிலைக் (Vertical) கூறுகளைப் பிரித்து நோக்கு வோம். எறிபொருளின்மேல் இயங்கும் ஒரே விசை, பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியேயாகும். இந்த விசை கீழ்முக நிலையிலே இயங்கும். எனவே, விசைகளின் பௌதிக சாராத கொள்கைப்படி பூமியின் ஈர்ப்புச்சக்தி, துகளின் கிடைஇயக்கத்தில் ஒரு தடையும் உண்டாக்க இயலாது. ஆகவே எறிபொருள் இயக்கம் முழுமையிலும் கிடைதிசை வேகம் ஒரு மாறிலியாக இருக்கும். ஆனால் துகளின் நிறை, கீழ்முக நிலையில் இயங்குவதால், துகளின் நிலைஇயக்கத்தில் அதற்கு முழுப் பங்குண்டு. 'm' திணிவுள்ள ஒரு துகளில், கீழ்முக நிலையில், 'mg' என்ற நிறை இயங்கும்போது அது கீழ்முக நிலையில் 'g' என்ற முடுக்கத்தை உண்டாக்குகிறது. எனவே, திசைவேகத்தின் நிலைகூறு, 'g' என்ற எதிர்முடுக்கத்துக்குக் கட்டுப்பட்டிருக்கும்.

3. **தேற்றம்:** எறிபொருளின் பாதை (வெற்றிடத்தில்) ஒரு பரவளை (Parabola) வென நிரூபி.

முதல் நிறுவல்: கிடைதளத்துடன் 'α' என்ற கோணம் உண் டாக்கும் வகையில் துகள் 'O'-யிலிருந்து, 'U' என்ற திசைவேகத் துடன் எறியப்படட்டும். O ஐ ஆதியாகவும் O-ன் வழியாக வரையப் படும் கிடை, நிலைதிசைகளை OX, OY என்றும் எடுத்துக்கொள்க.

'U' என்ற திசைவேகத்தை, கிடைதிசையில் $U \cos \alpha$ என்றும் நிலைதிசையில் $U \sin \alpha$ என்றும் கூறுபோடுக. எனவே கிடை கூறுக



படம் 55.

'$U\cos\alpha$' திசைவேகம், இயக்கம் முழுமையிலும் மாறாமல் இருக்கும். ஆனால் நிலைகூறான '$U\sin\alpha$ திசைவேகம், கீழ்முக முடுக்கமான 'g'-க்குக் கட்டுப்பட்டிருக்கும்.

எறிந்த கணத்திலிருந்து 't' வினாடிகள் கழித்துத் துகள் $P(x, y)$ என்ற இடத்தில் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

x = 't' வினாடிகளில் துகள் சென்ற கிடைதூரம்

$$= U\cos\alpha \,.\, t \qquad \text{......(1)}$$

y = t வினாடிகளில் துகள் சென்ற நிலைதூரம்

$$= U\sin\alpha \,.\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{......(2)}$$

(1), (2) என்ற இரு சமன்பாடுகளை எறிபொருள் பாதையின் துணையலகு சமன்பாடுகளாகக் கொள்ளலாம். அல்லது (1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து 't' ஐ நீக்கவும்.

$$t = \frac{x}{U\cos\alpha}$$

$$\therefore\ y = U\sin\alpha \,.\, \frac{x}{U\cos\alpha} - \tfrac{1}{2}g \,.\, \frac{x^2}{U^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore\ y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2U^2\cos^2\alpha}$$

$$\frac{2U^2\cos^2\alpha}{g}\,y = \frac{2U^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}\,x - x^2$$

$$\therefore \left[x - \frac{U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}\right]^2 - \frac{U^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{g^2}$$

$$= -\frac{2U^2 \cos^2\alpha}{g} y$$

$$\therefore \left[x - \frac{U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}\right]^2 = -\frac{2U^2 \cos^2\alpha}{g}\left[y - \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right]$$

$\left[\frac{U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right]$ என்ற புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்றுக.

$$X^2 = \frac{-2\, U^2 \cos^2 \alpha}{g} Y$$

இது ஒரு பரவளைவின் சமன்பாட்டையே குறிக்கும். பரவளைவின் உச்சியின் அச்சு தூரங்கள் $\left[\frac{U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right]$ ஆகும்.

அதன் செவ்வகலம் $= \frac{2U^2 \cos^2 \alpha}{g}$

செவ்வகலத்தின் குறி '$-$' ஆக இருப்பதால், பரவளைவின் அச்சு நிலையாகவும் கீழ்முகமாகவும் உள்ளது.

குறிப்பு 1 : பரவளைவின் செவ்வகலம் (Latus Rectum)

$$= \frac{2U^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

$$= \frac{2}{g}(U \cos \alpha)^2$$

$$= \frac{2}{g}\,[\text{கிடைதிசை வேகத்தின் வர்க்கம்}]$$

எனவே, பரவளைவின் செவ்வகலம், அதாவது பரவளைவின் பருமன் ஆரம்பத் திசைவேகத்தின் கிடைகூற்றை மட்டும் பொறுத்திருக்கிறது. நிலைகூற்றுத் திசைவேகம் செவ்வகலத்தைப் பாதிக்காதென்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

குறிப்பு 2 : $SB = AB - AS$

$$= \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{U^2 \cos^2 \alpha}{2g} = \frac{-U^2 \cos 2\alpha}{2g}$$

$\therefore \alpha < 45°$, குவியம் OX-க்கு கீழே அமையும்.

நிறுவல் (2)

படம் 56.

P என்பதை எறிபுள்ளியாகவும், 'U' ஐ எறிதிசை வேகமாகவும் 'α' ஐ எறிகோணமாகவும் கொள்க.

$\alpha = \angle XPT$ ஆகும்.

புள்ளியின் இயக்கம், PT-யின் வழியாக வரையப்படும் நிலை சம தளத்தில்தான் நடக்கவேண்டும். ஏனென்றால் துகளின்மேல் இயங்கும் ஒரே விசையான நிறை இந்தச் சமதளத்திலேயே இயங்குகிறது.

துகள் எறியப்பட்டு 't' விநாடிகள் கழித்து அதன் நிலையை ஆராய்வோம். எறியும் திசையில் $PT = Ut$ என்ற அளவில் T ஐக் குறிக்க. $\frac{1}{2}gt^2$ சமமாக நிலை கீழ்முகத்தில் TQ என்ற நேர்கோட்டை வரைக. எனவே 't' விநாடிகள் கழித்துத் துகள் 'Q' என்ற புள்ளியில் இருக்கும்.

PT-க்கு இணையாக QV என்ற நேர்கோட்டை வரைக. அது 'P'-ல் வரையப்படும் நிலைகோட்டை 'V' என்ற புள்ளியில் சந்திக் கட்டும்.

எனவே $VQ = PT$
$$= Ut$$
$$VP = Qt$$
$$= \frac{1}{2}gt^2$$

ஆகவே 't'-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$QV^2 = U^2t^2$$
$$= U^2 \cdot \frac{2VP}{g}$$
$$= \frac{2U^2}{g} \cdot PV$$

ஆதலால் PVR விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்பட்ட பரவளைவு PTR P-ல் தொட்டால், அதன் குவியம் (focus) S என்பது $4SP \frac{2U^2}{g}$ என்ற முறையில் அமையும். எனவே, Q இந்த பரவளைவின் மேலே இருக்கும்.

3·1. எறிபொருள் இயக்கத்தின் சிறப்புகள்: பக்கத்திலுள்ள 55 வரைபடத்தில் 'A' எறிபொருளின் பாதையிலுள்ள அதி உயர மான புள்ளியாகும். பாதையை மீண்டும் 'O'ன் வழியாக வரையப் படும் கிடை சமதளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளி 'C' ஆகும்.

(1) **எறிபொருள் அடையும் மீப்பெரு உயரம்:** உயரமான புள்ளியான 'A'-ல் துகள் கிடைதிசையில் இயங்குகிறது. எனவே, அதற்கு நிலைதிசை வேகம் இல்லை யெனலாம்.

$$AB = h \text{ என்றால்}$$
$$0-(U \sin \alpha)^2 = -2gh$$
$$\frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g} = h$$

எனவே பரவளைவின் உச்சியே, எறிபாதையின் அதி உயரமான புள்ளியாகும்.

(2) **அதி உயரமான புள்ளியை அடைய எறிபொருள் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்**

$$0 = U \sin \alpha - gt$$
$$\therefore \quad t = \frac{U \sin \alpha}{g}.$$

(3) **பறக்கும் நேரம்:** துகள் ' O ' என்ற புள்ளியிலிருந்து தொடங்கி ' C ' என்ற புள்ளிக்கு வந்து சேரும்போது, அது நிலை திசையில் ' 0 ' (பூச்சியம்) தூரமே இயங்கி இருக்கிறது. ஆகவே நிலை இயக்கத்தைப் பொறுத்தவரை

$$0 = (U \sin \alpha)\, t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore \quad t = 0 \text{ அல்லது } t = \frac{2U \sin \alpha}{g}.$$

குறிப்பு: பறக்கும் நேரம், அதி உயரமான புள்ளியை அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தைப்போல் இரண்டு பங்கென்பதைக் கவனிக்க.

(4) **வீச்சுபுள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடை சம தளத்தில் வீச்செல்லை:** பறக்கும் நேரம் $\frac{2U \sin \alpha}{g}$ எனக் கண்டோம். இந்த நேரத்தில் கிடைதிசை வேகம் ஒரு மாறிலியாக ' $U \cos \alpha$ ' என்ற மதிப்புடன் உள்ளது.

$$\text{எனவே } OC = U \cos \alpha \cdot t$$

$$= \frac{U \cos \alpha \cdot 2U \sin \alpha}{g}$$

$$= \frac{2U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$\text{ஆகவே கிடை வீச்செல்லை } = \frac{2U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$= \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

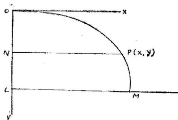
$$\text{கிடை வீச்செல்லை } = \frac{2(U \cos \alpha)(U \sin \alpha)}{g}$$

$$= \frac{2U'V'}{g}$$

[இங்கு U', V' என்பவை முறையே முதல் திசைவேகத்தின் கிடை, நிலை கூறுகளாகும்.]

4. தேற்றம்

தரையிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட உயரத்திலிருந்து துகள் கிடை திசையில் எறியப்படுவதாகக் கொண்டால், துகளின் பாதை ஒரு பரவளைவு எனக் காண்பி.



படம் 57.

LM என்பதைச் சமதள தரையைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளுவோம். அதிலிருந்து 'h' உயரத்திலுள்ள O என்ற புள்ளியிலிருந்து துகள் கிடைதிசையில் 'U' ஆரம்ப வேகத்துடன் எறியப்படுவதாகக் கொள்ளுவோம். கிடைதிசையை x– அச்சு OX ஆகவும் கீழ்முக நிலை அச்சை OY ஆகவும் கொள்க.

't' நேரத்தில் துகள் $P(x, y)$ என்ற புள்ளியிலிருப்பதாகக் கொள்க. கிடைமுடுக்கு இல்லையாதலால் கிடைதிசை வேகம் மாறாதிருக்கிறது.

எனவே $x_P = NP$

$= $ 't' நேரத்தில் துகள் நகரும் கிடைதூரம்

$= Ut$ ......(1)

பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால், துகள் நகரும்போது நிலைமுடுக்கு 'g' கீழ்முகமாக இயங்குகிறது. நிலைதிசை வேகம் இல்லாததால்

$y_P = ON$

$=$ 't' நேரத்தில் துகள் நகரும் நிலைதூரம்

$= \frac{1}{2}gt^2$ ......(2)

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து 't'ஐ நீக்கினால்

$$y = \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{U^2}$$

$$x^2 = \frac{2U^2}{g} \cdot y \qquad ......(3)$$

(3) – சமன்பாடு ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும். அந்தப் பரவளை வின் உச்சி O ஆகவும், அச்சு ON ஆகவும் அமையும்.

5. தேற்றம்

வீச்சுதிசை வேகத்தின் அளவு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, எறிபொருளின் கிடை வீச்செல்லை எப்போது உச்சத்திலுள்ள தென்று கண்டுபிடிக்க.

ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U' எனவும், வீச்சுக் கோணம் 'α' எனவும் கொண்டால், வீச்சுப்புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்தின்மேல் வீச்செல்லை 'R' எனலாம்.

$$R = \frac{2U^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

g மாறிலியாகும். வீச்சுத் திசைவேகம் 'U' கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. எனவே R உச்சத்திலிருக்க வேண்டுமெனில் $\sin 2\alpha$ உச்சத்திலிருக்க வேண்டும்.

அதாவது $\sin 2\alpha = 1$

எனவே $2\alpha = 90°$

$\alpha = 45°$.

கொடுக்கப்பட்ட திசைவேகத்துக்கு, கிடை வீச்செல்லை உச்சத்தை அடைய வீச்சுக்கோணம் 45° ஆக இருக்க வேண்டும். அப்போது

$$\text{உச்ச வீச்செல்லை} = \frac{U^2}{g}.$$

6. தேற்றம்

ஆரம்ப வீச்சுத் திசைவேகம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, குறிப்பிட்ட கிடை வீச்செல்லையை அடைய சாதாரணமாக இரு வீச்சுத் திசைகளுண்டெனக் காண்பி.

ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U' எனவும், வீச்சுக் கோணம் 'α' எனவும் கொள்க.

குறிப்பிட்ட வீச்செல்லையை 'K' என்று கொண்டால்

$$K = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{gK}{U^2}$$

g மாறிலியாகவும், 'U', 'K' என்பவைகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்ப தாலும் $\sin 2\alpha$ என்பது ஒரு நிறை மாறிலி அளவாகும்.

$gK < U^2$ என்றால், $\sin\theta = \frac{gK}{U^2}$ என்று அமையும் 'θ' குறுங் கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

எனவே $\sin 2\alpha = \sin\theta$

$\therefore\ 2\alpha = \theta$ அல்லது $2\alpha = 180 - \theta$

$\therefore\ \alpha = \frac{\theta}{2}$ அல்லது $\alpha = 90 - \frac{\theta}{2}$

ஆகவே ஆரம்ப வீச்சுக் கோணத்திற்கு $\frac{\theta}{2}$, $90 - \frac{\theta}{2}$ என்ற இரு அளவுகள் உள்ளன. இந்த இரு அளவுகளையும் α, β என்று கொண்டால் $\alpha + \beta = 90°$ என்றாகிறது.

'θ' குறுங்கோணமாதலால் அதாவது $\theta < 90°$ என்பதால் $\alpha = \frac{\theta}{2} < 45°$

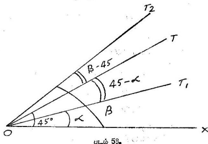
எனவே, $\beta > 45$

மேலும், $45° - \alpha = 45 - \frac{\theta}{2}$

$= 90 - 45 - \frac{\theta}{2}$

$= 90 - \frac{\theta}{2} - 45$

$= \beta - 45°$



படம் 53.

ஆரம்பத் திசைவேகத்துடன் உச்சக் கிடைவீச்செல்லையை அடைய வேண்டிய வீச்சுக்கோணம் 45°ஆக இருக்கவேண்டும். எனவே α, β என்ற இருதிசைகளும் உச்ச வீச்செல்லையின் திசைக்கு சமமாகச் சாய்ந் திருக்கும். கொடுக்கப்பட்ட வீச்செல்லை 'K'ஐ அடைய வீச்சுக் கோணத்தின் திசைகள் OT_1, OT_2 ஆக இருக்கவேண்டும்.

$$OT = 45° \text{ என்றால்}$$

$$\angle T_1OT = \angle XOT - \angle XOT_1$$

$$= 45° - \alpha$$

$$\angle TOT_2 = \angle XOT_2 - \angle XOT$$

$$= \beta - 45°$$

எனவே $\angle T_1OT = \angle TOT_2$

$\therefore$ OT, என்பது OT_1, OT_2 இவைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தைச் சமமாகப் பிரிக்கிறது.

$gK = U^2$ என்றால் $\sin 2\alpha = 1$

$$\therefore \; 2\alpha = 90°$$

$$\therefore \; \alpha = 45°$$

எனவே α-க்கு ஒரே ஒரு மதிப்பே உள்ளது.

அந்த அளவு, உச்ச வீச்செல்லைக்குரிய கோணமாகும்.

$gK^2 > U^2$ என்றால் $\sin 2\alpha > 1$

எனவே 'α'க்கு மெய்யான மதிப்புக் கிடையாது.

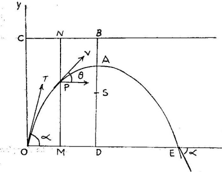
அதாவது $\dfrac{'U^2'}{g}$-க்கு அதிகமான வீச்செல்லை கிடையாது.

ஏனெனில், அதுவே உச்ச வீச்செல்லையாகும். அதேபோல், 'K'-ன் மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டால் $U^2 \nless gK$. எனவே மிகச்சிறு திசைவேகம்

$$U = \sqrt{gK} \text{ ஆகலாம்.}$$

7. தேற்றம்

't' நேரம் முடிந்தவுடன் எறிபொருளின் திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க [அதன் அளவையும், திசையையும்]



படம் 59.

கிடைதிசையுடன் 'α' கோணம் உண்டாக்கும் வகையில் எறிபொருள், 'O'-விருந்து 'U' திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படட்டும். 't' நேரத்திற்குப் பிறகு எறிபொருள், P என்ற இடத்தில் இருப்பதாகக் கொள்ளுவோம். அப்போது திசைவேகம் 'V' எனவும், அந்தத் திசைவேகம் கிடைதிசையுடன் 'θ' கோணம் உண்டாக்குவதாகவும் கருதுக.

'V'ஐயும் θஐயும் கண்டுபிடிக்க.

செலுத்தப்படும் திசைவேகத்தின் கிடைகூறுன $U \cos \alpha$ மாறுமலிருப்பதால்,

$$V \cos \theta = U \cos \alpha \qquad \ldots\ldots(1)$$

நிலைகூறுன $U \sin \alpha$, 'g' என்ற எதிர்முடுக்கத்திற்கு உட்பட்டிருப்பதால்

$$V \sin \theta = U \sin \alpha - gt \qquad \ldots\ldots(2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளை வர்க்கங்களாக்கிக் கூட்டுக.

$$V^2 = U^2 - 2Ugt \sin \alpha + g^2t^2$$

$$\therefore \quad V = \sqrt{U^2 - 2Ugt \sin \alpha + g^2t^2} \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \quad \tan \theta = \frac{U \sin \alpha - gt}{U \cos \alpha} \qquad \ldots\ldots(4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4) P-ல் ஏற்படும் திசைவேகத்தின் அளவையும் அதன் திசையையும் குறிப்பிடுகிறது.

குறிப்பு 1

$$U \sin \alpha > gt \text{ அதாவது } t < \frac{U \sin \alpha}{g}$$

=(உச்சப்புள்ளி Aஐ அடைய எறிபொருள் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்) $\tan \theta$ நேர்குறியுடையதாகும். எனவே 'θ'-வும் '+' குறியுடையது.

$$t > \frac{U \sin \alpha}{g}, \quad \theta \text{ '}-\text{' குறியுடையது}$$

$$t = \frac{U \sin \alpha}{g} \quad \theta = O$$

எனவே உச்சப்புள்ளி A-ல், திசைவேகம் கிடைதிசையிலுள்ளது.

குறிப்பு 2

$$t = \frac{2U \sin \alpha}{g} \ (= \text{பறக்கும் நேரம்}) \text{ என்றால்}$$

$$V = \sqrt{U^2 - 2Ug \sin \alpha \frac{2U \sin \alpha}{g} + g^2 \frac{4U \sin^2 \alpha}{g^2}}$$

$$= \sqrt{U^2 - 4U^2 \sin^2 \alpha + 4U^2 \sin^2 \alpha}$$

$$= U$$

$$\tan \theta = \frac{U \sin \alpha - g \dfrac{2U \sin \alpha}{g}}{U \cos \alpha}$$

$$= -\frac{U \sin \alpha}{U \cos \alpha}$$

$$= -\tan \alpha$$

$$\therefore \quad \theta = -\alpha$$

எனவே எறிபொருள் 'O'-ன் வழியாக வரையப்படும் கிடைசமதளத்தை மீண்டும் சந்திக்கும்பொழுது, அதன் திசைவேகத்தின் அளவு 'V' என்று இருப்பதும், திசை கிடைதிசையுடன் '$-\alpha$' கோணம் உண்டாக்குவதும் கவனிக்கத்தக்கது.

8. தேற்றம்

எறிபொருளின் பாதையிலுள்ள 'P' புள்ளியில் அதன் திசைவேகம், இயக்குவரையிலிருந்து எறிபொருள் தடங்கலின்றி P-க்கு விழும்போது உண்டாக்கும் திசைவேகத்தின் அளவுக்குச் சமம்.

['t' நேரம் கழிந்தவுடன் எறிபொருள் P என்ற புள்ளியிலிருப்பதாகக் கொள்ளுவோம். அப்போது அதன் திசைவேகம் 'V' எனவும்,

அதன் திசை கிடைதிசையுடன் உண்டாக்கும் கோணம் 'θ' எனவும் எடுத்துக்கொண்டால்,

$$V = \sqrt{U^2 - 2Ugt \sin \alpha + g^2t^2}$$

என்று கண்டோம். எறிபாதையின் இயக்குவரையில் P-க்கு நேர் மேலேயுள்ள புள்ளி N என்றால்

$V'^2 = 2g \cdot NP$ [V' = N-லிருந்து P-க்கு எறிபொருள் தடங்க லில்லாமல் பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியை மட்டும் கொண்டு விழும்போது உண்டாகும் திசை வேகம்.]

இப்போது NP-ன் அளவைக் கண்டுபிடிக்க.

$$AB = AS$$
$$= \tfrac{1}{4} \text{ [பரவளேவின் செவ்வகலம்]}$$
$$= \tfrac{1}{4} \cdot \frac{2U^2 \cos^2 \alpha}{g}$$
$$= \frac{U^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

$$AD = A\text{-ன் உயரம்}$$
$$= \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$\therefore \quad BD = \frac{U^2 \cos^2 \alpha}{2g} + \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$
$$= \frac{U^2}{2g}$$

$$MN = DB$$
$$= \frac{U^2}{2g}$$

MP = 't' விநாடிகளில் எறிபொருள் இயங்கும் நிலேதூரம்

$$= U \sin \alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} gt^2$$

$$\therefore \quad PN = MN - MP$$
$$= \frac{U^2}{2g} - (U \sin \alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} gt^2)$$

$$\therefore \quad V'^2 = 2g\left[\frac{U^2}{2g} - U \sin \alpha \cdot t + \tfrac{1}{2} gt^2\right]$$
$$= U^2 - 2Ugt \sin \alpha + g^2t^2$$
$$= V^2$$
$$\therefore \quad V' = V$$

குறிப்பு: $MN = \frac{U^2}{2g}$ என்பதால், எறிபுள்ளிக்குமேல், இயக்கு வரையின் உயரம் 'U'ஐ மட்டும் சார்ந்திருக்கிறது. 'α' அதன் உயரத்தைப் பாதிக்காது. எனவே, ஒரு புள்ளி 'O'-லிருந்து, ஒரே வேகத்துடன், பல திசைகளில், துகள்கள் எறியப்பட்டால், அந்தத் துகள்களின் எறிபாதைகள் ஒரே இயக்குவரையைக் கொண்டிருக்கிற தென்பது கவனிக்கத்தக்கது.

9. தேற்றம்

எறிதிசை வேகத்தின் அளவு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, துகள் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியை அடைய, இரு எறிதிசைகள் உண்டு.

எறிபொருளின் நியமப்பாதை

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha}$$

[இங்கு எறிதிசைவேகம் 'U' எனவும், அதன் திசை, கிடைதிசையுடன் 'α' கோணம் உண்டாக்குவதெனவும் கொள்க.]

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் (x_1, y_1) என்றால்

$$y_1 = x_1 \tan \alpha - \frac{gx_1^2}{2U^2 \cos^2 \alpha}$$

$$= x_1 \tan \alpha - \frac{gx_1^2}{2U^2} (1+\tan^2 \alpha)$$

$$\therefore\ gx_1^2 \tan^2 \alpha - 2U^2x_1 \tan \alpha + (2U^2y_1 + gx_1^2) = 0$$

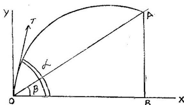
இந்தச் சமன்பாடு '$\tan \alpha$' என்பதில் இருபடி சமன்பாடாகும். ஆகவே, இதன் மூலங்கள் $\tan \alpha_1$, $\tan \alpha_2$ என்றால், துகள் எறியப்படும் திசைகள் இரண்டென்பது தெளிவு.

10. சாய்தளத்தின் (Inclined plane) மேல் வீச்செல்லை: கிடைதிசையுடன் 'β' கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் சாய்தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து, கிடைதிசைக்கு 'α' கோணமுண்டாக்கும் 'U' திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் எறியப்படட்டும். அது எறியப்படும் சமதளம், சாய்தளத்திற்கும், அதன் அதிசாய்வு நேர்கோட்டிற்கும், செங்குத்தாகவுள்ள கோட்டின் வழியாகச் செல்லவேண்டும்.

10·1. தேற்றம்

சாய்தளத்தின் மேல் வீச்செல்லையைக் கண்டுபிடிக்க

OX கிடைதிசையைக் குறிக்கட்டும். அதனுடன் 'β' கோண முண்டாக்கும் சாய்தளத்தின் வெட்டுமுகம் OA ஆகக் கொள்க.



படம் 60.

'O'-லிருந்து எறியப்படும் துகள் மீண்டும் சமதளத்தை 'A' என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும். OA-ன் அளவைக் கண்டுபிடிக்க.

ஆரம்பத் திசைவேகமான 'U'ஐ OA திசையிலும் அதற்கு செங் குத்துத் திசையிலும் கூறு போடுக.

OA திசையின் கூறு $U \cos(\alpha-\beta)$

செங்குத்துத் திசையில் அதன் கூறு $U \sin(\alpha-\beta)$. இந்தத் திசை யில் முடுக்கு $-g \cos\beta$ ஆகும்.

O-லிருந்து A-க்குத் துகள் செல்ல 't' நேரமாகுமென்றால், இந்த நேரத்தில், OA-க்குச் செங்குத்துத் திசையில், துகள் நகரும் தூரம் 0 ஆகிறது.

$$\text{எனவே } 0 = U \sin(\alpha-\beta)\, t - \tfrac{1}{2} g \cos\beta \,.\, t^2$$

$$\therefore\ t = \frac{2U \sin(\alpha-\beta)}{g \cos\beta}$$

இந்த நேரத்தில் கிடைதிசை வேகம் ($U \cos\alpha$) ஆதலால்

$$OB = U \cos\alpha \,.\, t$$

$$= U \cos\alpha \,.\, \frac{2U \sin(\alpha-\beta)}{g \cos\beta}$$

$$OA = \frac{OB}{\cos\beta}$$

$$= \frac{2U^2 \sin(\alpha-\beta) \cos\alpha}{g \cos^2\beta}$$

மற்றொரு முறை : $OA=\gamma$ என்று கொள்ளுவோம். எனவே, A-ன் அச்சு தூரங்கள் ($\gamma \cos\beta$, $\gamma \sin \gamma$) ஆகும்.

எறிபொருளின் பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2\alpha}$$

இந்தப் பாதையில் A இருந்தால்

$$\gamma \sin\beta = \gamma \cos\beta \tan\alpha - \frac{gr^2 \cos^2\beta}{2U^2 \cos^2\alpha}$$

$$\therefore\ \gamma = \frac{2U^2 \cos^2\alpha\,[\cos\beta \tan\alpha - \sin\beta]}{g \cos^2\beta}$$

$$= \frac{2U^2 \cos\alpha\,[\cos\beta \sin\alpha - \cos\alpha \sin\beta]}{g \cos^2\beta}$$

10·2 தேற்றம்

உச்ச வீச்செல்லை (Maximum Range) : *சாய்தளத்தின்மேல் உச்ச வீச்செல்லையை உண்டாக்கும் வீச்சு திசையைக் கண்டுபிடிக்க.*

$$\text{வீச்செல்லை} = \frac{2U^2 \cos\alpha \sin(\alpha-\beta)}{g \cos^2\beta}$$

$$= \frac{U^2}{g \cos^2\beta}\,[\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta]$$

'U', 'β' இவைகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. எனவே வீச்செல்லை உச்சத்திலிருக்க, $\sin(2\alpha-\beta)$ மிக அதிகமாக இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore\ \sin(2\alpha-\beta) = 1$$

$$\therefore\ 2\alpha-\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$$

$$\alpha-\beta = \frac{\pi}{2}-\alpha$$

$$\text{எனவே உச்ச வீச்செல்லை} = \frac{U^2}{g \cos^2\beta}(1-\sin\beta)$$

$$= \frac{U^2}{g}\,\frac{(1-\sin\beta)}{(1-\sin^2\beta)}$$

$$= \frac{U^2}{g\,(1+\sin\beta)}$$

குறிப்பு 1 : அதாவது $\angle AOT = \angle TOY$

துகள் எறியப்படும் திசை OT, $\angle AOY$ஐ இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கிறது. $\angle AOY$, நிலை அச்சு OY-க்கும் சாய்தளம் OA-க்கு மிடையேயுள்ள கோணம்.

10·3. தேற்றம்

வீச்செல்லையின் அளவு கொடுக்கப்பட்டால், வீசும் திசைகள் இரண்டு உண்டு. அவைகள் உச்ச வீச்செல்லையின் திசைக்குச் சமமாக சாய்ந்திருக்கும்.

வீச்செல்லையின் அளவு கொடுக்கப்பட்டால்

$\sin(2\alpha-\beta)$-ன் அளவும் கொடுக்கப்பட்டதெனலாம்

$\sin(2\alpha-\beta) = \sin\theta$ என்றால்

$2\alpha-\beta = \theta$ அல்லது $180-\theta$ ஆகும்.

$\therefore (2\alpha_1-\beta) = \theta$ என்போம்.

$(2\alpha_2-\beta) = 180°-\theta$ என்போம்.

எனவே, α_1, α_2 என்ற இரண்டு வீச்சுக் கோணங்க ளுண்டென்பது தெளிவு.

$$\therefore 2\alpha_2-\beta = \pi-(2\alpha_1-\beta)$$

$$\therefore \alpha_2-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\alpha_1$$

$\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}$ என்ற கோணம், உச்ச வீச்செல்லையை அடையும் வீச்சுக் கோணமாகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வீச்செல்லையையடைய உண்டாகும் இரண்டு வீச்சு திசைகளும், உச்ச வீச்செல்லையை யடையும் வீச்சு திசைக்குச் சமமாகச் சாய்ந்திருக்கும்.

10·4. தேற்றம்

சாய்தளத்திலிருந்து எறிபொருள் அடையும் உச்சத் தூரத்தைக் கணக்கிடுக.

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் துகளின் இயக்கத்தைக் கவனிப்போம். இந்தத் திசையில் ஆரம்பத் திசைவேகம் $U\sin(\alpha-\beta)$ எனவும் அந்தத் திசைவேகம் '$g\cos\beta$' என்ற எதிர்முடுக்கத்திற்குக் கட்டுப்பட்டிருக்கிறதென்றும் கண்டோம்.

't' நேரத்தில் துகள் நகர்ந்திருக்கும் 'y' தூரம்,

$$y = U \sin(\alpha - \beta).\, t - \tfrac{1}{2} g \cos\beta.\, t^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = U \sin(\alpha - \beta) - g \cos\beta.\, t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \cos\beta$$

= குறை குறியேயுள்ளது.

y உச்சத்தில் இருக்க $\dfrac{dy}{dt} = 0$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

அப்போது $t = \dfrac{U \sin(\alpha - \beta)}{g \cos\beta}$ ஆகும்.

அந்த நேரத்தைப் பயன்படுத்தி 'y'-ன் உச்ச மதிப்பு

$$= U \sin(\alpha - \beta) \frac{U \sin(\alpha - \beta)}{g \cos\beta} - \tfrac{1}{2} g \cos\beta \frac{U^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{g^2 \cos^2\beta}$$

$$= \frac{U^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{g \cos\beta} - \frac{U^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{2g \cos\beta}$$

$$= \frac{U^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{2g \cos\beta}$$

குறிப்பு : y-ன் உச்ச மதிப்பான $\dfrac{U^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{2g \cos\beta}$ஐ அடைய ஆகும் நேரம் $= \dfrac{U \sin(\alpha - \beta)}{g \cos\beta}$

இந்நேரம் பறக்கும் நேரத்தில் பாதி என்பது தெளிவு.

மற்றொரு முறை :—சாய்தளத்திலிருந்து துகள் மிக அதிகத் தூரத்தில் இருக்கும்போது, துகளின் திசைவேகம், சாய்தளத்திற்கு இணையான திசையிலே இருக்கும். எனவே சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசைவேகத்தின் கூறு = 0 எனலாம். ஆகவே 'x' சாய்தளத்திலிருந்து அதிகத் தூரத்தைக் குறித்தால்

$$0 - [U \sin(\alpha - \beta)]^2 = -2g \cos\beta.\, x$$

$$\therefore x = \frac{U^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{2g \cos\beta}$$

இந்த உயரத்தையடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் 't' என்றால்,

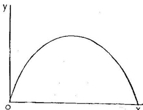
$$0 = U \sin(\alpha - \beta) - g \cos\beta.\, t$$

$$\therefore t = \frac{U \sin(\alpha - \beta)}{g \cos\beta}$$

11. தேற்றம்

அணைத்துக்கொள்ளும் பரவளைவு (Enveloping Parabola): கொடுக்கப்பட்ட திசைவேகத்துடன் ஒரே நிலை சமதளத்தில், துகள் ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்பட்டால், அவைகள் இயங்கும் பாதைகளின் அணைத்துக்கொள்ளும் வளைவரை வேறொரு பரவளைவாகும்.

நிறுவல் (1):



படம் 61.

வீச்சுப் புள்ளியை O என்ற ஆதியாகவும், O-ன் வழியாகச் செல்லும் கிடைகோட்டை x-அச்சாவும் O-ன் வழியாகச் செல்லும் நிலைகோட்டை y-அச்சாகவும் எடுத்துக்கொள்க. 'α' வீச்சுக் கோணமாகவும், 'U' திசைவேகமாகவும் இருந்தால் வீச்சுப் பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \qquad (1)$$

இதை அணைத்துக்கொள்ளும் வளைவரையைக் கண்டுபிடிக்க (1) சமன்பாட்டை 'α'ஐ பொருத்து வகையிட்டு

$$0 = x \sec^2 \alpha - \frac{gx^2}{2U^2}[2 \tan \alpha \,.\, \sec^2 \alpha] \qquad (2)$$

$$= x - \frac{gx^2}{U^2} \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{U^2 x}{gx^2}$$

$$= \frac{U^2}{gx}$$

'α'-ன் இந்த மதிப்பை (1) சமன்பாட்டில் இடுக.

$$\therefore \quad y = x\frac{U^2}{gx} - \frac{gx^2}{2U^2}\left[1+\frac{U^4}{g^2x^2}\right]$$

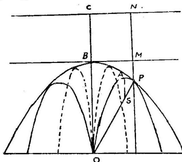
$$= \frac{U^2}{g} - \frac{gx^2}{2U^2} - \frac{U^2}{2g}$$

$$= \frac{U^2}{2g} - \frac{gx^2}{2U^2}$$

$$-\frac{2U^2}{g}\left[y - \frac{U^2}{2g}\right] = x^2$$

இதுவே அணைத்துக்கொள்ளும் பரவளைவின் சமன்பாடாகும்.

நிறுவல் (2) :



படம் 62.

வீச்சுப் புள்ளி O ஆகவும், வீச்சுத் திசைவேகம் 'U' ஆகவும் கொள்க. $\frac{U^2}{2g} = h$ என்று கருதுக.

நிலைதிசையில் 'h' தூரத்துக்கு OB என்ற நேர்கோட்டை வரைக. BM என்ற கிடை நேர்கோடு பரவளைவின் இயக்குவரை என்பதை அறிவோம். அந்த இயக்குவரை 'O'-லிருந்து 'U' திசைவேகத்துடன் வீசப்படும் எறிபொருளின் பாதைகளாகிய பரவளைவுகளுக்குப் பொதுவென்றும் அறிவோம்.

OAP என்பதை ஏதாவதொரு பாதையாகக் கொள்ளுவோம். அதன் குவியம் 'S' ஆகவும் OSP குவிய நாண் ஆகவும் இருக்கும்.

OBஐ நீட்டி, $BC = OB$ என்ற அளவில் Cஐக் குறிக்க. CNஐக் கிடைதிசையில் வரைக. நிலைதிசையில் PMN என்ற நேர்கோடு வரைக.

$$\begin{aligned} OP &= OS + SP \\ &= OB + PM \\ &= BC + PM \\ &= MN + PM \\ &= PN. \end{aligned}$$

இங்கு O நிலையான புள்ளி. CN, O-விலிருந்து $2h$ தூரத்தில் வரையப்பட்ட நேர்கோடு.

$PO = PN$ என்பதால் P-ன் நியமப்பாதை Oஐக் குவியமாகவும், CNஐ இயக்கு வரைவாகவும் (**Directrix**) கொண்ட ஒரு பரவளைவாகும்.

$OB = BC$. எனவே B பரவளைவின் உச்சியாகும்.

மேலும் ஏதாவதொரு பாதையிலுள்ள P-ன் குவிய தூரம் PS, இயக்குவரை தூரம் PM என்று ஆகிறது. இந்தப் பாதைக்கு P-ல் வரையப்படும் தொடுகோடு SPM கோணத்தை இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும்.

அதேபோல் OBP பரவளைவுக்கு PO குவியதூரமாகவும் PN இயக்குவரை தூரமாகவும் உள்ளது. எனவே OBP பரவளைவுக்கு P-ல் வரையப்படும் தொடுகோடு OPN அல்லது SPM கோணத்தை இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கிறது. ஆகவே, இரு பரவளைவுகளின் தொடு கோடுகளும் ஒன்றே என்பது தெளிவு. எனவே OBP பரவளைவு, OAP போன்ற பரவளைவுகளை வெளிப்பக்கமாகத் தொடுகிறது. ஆகையால் OAPஐ அணைத்துக்கொள்ளும் பரவளைவு எனலாம்.

குறிப்பு : அணைத்துக்கொள்ளும் பரவளைவு OBPஐப் பற்றிச் சில கருத்துகளை நினைவில் கொள்ளுவோம்.

1. அதன் குவியம், வீச்சுப் புள்ளி 'O' ஆகும்.

2. அதன் இயக்குவரை O-க்கு மேல் $\frac{U^2}{g}$ தூரத்திலுள்ளது.

இந்தத் தூரம் வீச்சுப்பாதைகளின் இயக்குவரையின் தூரத்தைப் போல் இரண்டு மடங்காகும்.

3. அதன் செவ்வகலம் $= 2 \cdot OC$
$= 2 \cdot 2h$
$= 4 \cdot h$

4. அதன் அச்சு OB கீழ்முக நிலைதிசையிலுள்ளது.

5. இந்த அணைத்துக் கொள்ளும் பரவளைவு வீச்சுப்பாதைகளை வெளிப்பக்கமாகத் தொடுவதால் இந்தப் பரவளைவுக்கு வெளியேயுள்ள எந்தப் புள்ளியையும், 'U' திசைவேகத்துடன் 'O'-லிருந்து எறியப் படும் துகள் அடைய முடியாது. எனவே இந்தப் பரவளைவை எல்லைப் பரவளைவு எனலாம்.

6. கொடுக்கப்பட்ட திசையில் வீச்செல்லையைக் கண்டுபிடிக்க, அந்தத் திசை, அணைத்துக் கொள்ளும் பரவளைவை எந்தப் புள்ளியில் சந்திக்கிறதென்று காண்க. அந்தப் புள்ளிக்கும் O-க்கும் உள்ள தூரமே வீச்செல்லையாகும்.

நிறுவல் (3)

'U' திசைவேகத்துடன் 'α' திசைகோணத்தில் இயங்கும் எறி பொருளின் பாதையின் சமன்பாட்டை

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \rightarrow (B) \text{ எனக் கொள்ளலாம்.}$$

கொடுக்கப்பட்ட வீச்சுத் திசைவேகத்துடன் துகள் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியை அடைந்தால்,

$$g_1 = x_1 \tan \alpha - \frac{gx_1^2}{2U^2 \cos^2 \alpha}$$

$$= x_1 t - \frac{gx_1^2}{2U^2}(1+t^2) \quad [\text{இங்கு } \tan \alpha = t \text{ என்போம்}]$$

$$\therefore gx_1^2 t^2 - 2U^2 x_1 t + (2U^2 y_1 + gx_1^2) = 0 \rightarrow \ldots\ldots (A)$$

இது 't'-ல் இருபடி சமன்பாடாகும். ஆகவே 't'-க்கு மெய்யான மதிப்பு இருக்கவேண்டுமானால், இதன் தன்மை காட்டி மிகையாகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோதான் இருக்கவேண்டும்.

$$4U^4 x_1^2 - 4gx_1^2 (2U^2 y_1 + gx_1^2) \geqslant 0$$
$$U^4 - 2U^2 g y_1 - g^2 x_1^2 \geqslant 0$$

$$\therefore \quad x_1^2 \leqslant -\frac{2U^2}{g}y_1 + \frac{U^4}{g^2}$$

$$\leqslant -\frac{2U^2}{g}\left[y_1 - \frac{U^2}{2g}\right]$$

$x_1^2 > -\frac{2U^2}{g}\left[y_1 - \frac{U^2}{2g}\right]$ என்றால் (A) சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யிலானவைகளாகும். எனவே எறிபொருளின் பாதை (x_1, y_1) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்ல முடியாது.

ஆகவே பாதையில் (x_1, y_1) என்ற புள்ளி இருக்கவேண்டுமானால்

$$x_1^2 \leqslant -\frac{2U^2}{g}\left[y_1 - \frac{U^2}{2g}\right]$$

$x_1^2 = -\frac{2U^2}{g}\left[y_1 - \frac{U^2}{2g}\right] \rightarrow$(D) என்ற நிபந்தனைபடி (x_1, y_1) என்ற புள்ளி,

$x^2 = -\frac{2U^2}{g}\left[y - \frac{U^2}{2g}\right] \rightarrow$ (C) என்ற பரவளையின் மேலிருக்க வேண்டும்.

$x_1^2 < -\frac{2U^2}{g}\left[y_1 - \frac{U^2}{2g}\right]$ என்ற நிபந்தனைப்படி, (x_1, y_1) என்ற புள்ளி பரவளைவுக்குள்ளே இருக்கவேண்டும்.

$x^2 > \frac{-2U^2}{g}\left[y - \frac{U^2}{2g}\right]$ என்றால் (x_1, y_1) என்ற புள்ளி பரவளைவுக்கு வெளியேயுள்ளது.

எனவே 'O'ஐ ஆதியாகக் கொண்டு அதன் வழியாகச் செல்லும் நிலைதளத்தில் எறியப்படும் துகள், கொடுக்கப்பட்ட ஆரம்பத் திசை வேகத்துடன் இயங்கினால், அது இயங்கும் பாதையிலுள்ள புள்ளிகள் (C) சமன்பாடு குறிக்கும் பரவளைவின் மேலோ அல்லது உள்ளேயோ இருக்கும். ஆகவே இந்தப் பரவளைவை எல்லைப் பரவளைவு எனலாம்.

இந்த எல்லைப் பரவளைவு, (B) சமன்பாடு குறிக்கும் பரவளைவைத் தொடுகிறதெனக் காண்பிப்போம்.

(C), (B)-ஐ (x_1, y_1)-ல் சந்திக்கட்டும். (D) நிபந்தனைப்படி, (A)-ன் மூலங்கள் சமமாகும்.

$$t_1+t_2=\frac{2U^2x_1}{gx_1^2}$$

$t_1 = t_2$ என்பதால்

$$\therefore \quad 2\tan\alpha = \frac{2U^2}{gx_1}$$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{U^2}{gx_1}$$

$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2U^2}(1+\tan^2\alpha)$ என்பதை x-ஐப் பொறுத்து வகையிடுக.

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha - \frac{gx}{U^2}(1+\tan^2\alpha)$$

$\tan\alpha = \frac{U^2}{gx}$ என்பதால்

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{U^2}{gx_1} - \frac{gx_1}{U^2}\left(1+\frac{U^4}{g^2x_1^2}\right)$$

$$= \frac{U^2}{gx_1} - \frac{gx_1}{U^2} - \frac{U^2}{gx_1}$$

$$= -\frac{gx_1}{U^2}$$

$x^2 = \frac{-2U^2}{g}\left[y - \frac{U^2}{2g}\right]$ என்பதை x-ஐப் பொறுத்து வகையிட்டால்

$$2x = \frac{-2U^2}{g} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$\therefore$ (x_1, y_1) புள்ளியில்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-gx_1}{U^2} \text{ ஆகிறது.}$$

(B), (C) சமன்பாடுகள் குறிக்கும் பரவளைவுகள் அவைகள் சந்திக்கும் புள்ளியில் ஒரே சாய்வு மதிப்பை உடையன. எனவே அவைகள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன.

'α' மாறும்போது, (B) குறிக்கும் பரவளைவுகள் எல்லாம் (C) குறிக்கும் பரவளைவைத் தொடுகின்றன. எனவே (C)-ஐ (B)-ன் அணைத்துக் கொள்ளும் பரவளைவு என்கிறோம்.

$\frac{U^2}{2g} = h$ என்றால் அணைத்துக்கொள்ளும் பரவளைவின் சமன்பாட்டை $x^2 = -4h\,(g-h)$ என்று எழுதலாம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. 30° ஏற்றக் கோணத்தில், விநாடிக்கு 30 செ. மீ. திசைவேகத்தில், ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. (1) அடையும் மிக அதிகத் தூரம், (2) பறக்கும் நேரம், (3) எறியும் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்தின் மேல் வீச்செல்லை, (4) 15 செ. மீ. உயரத்தில் துகளின் திசைவேகம், அதன் திசை—இவைகளைக் கண்டுபிடிக்க.

ஆரம்பக் கிடைதிசை வேகம் $= 30 \times \cos 30°$

$= 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 15\sqrt{3}$ செ. மீ./விநாடி.

ஆரம்ப நிலை திசைவேகம் $= 30 \times \sin 30°$

$= 30 \times \frac{1}{2}$

$= 15$ செ. மீ./விநாடி.

(1) அடையும் மிக அதிகத் தூரம் 'h' என்று கொண்டால், அப்போது துகளுக்கு நிலைதிசை வேகம் கிடையாது. எனவே,

$$0 - 15^2 = -2g.h$$

$$\therefore\ h = \frac{225}{2 \times g} \text{ செ. மீ. } g = 981 \text{ செ.மீ./(விநாடி)}^2$$

(2) பறக்கும் நேரம் 't' விநாடிகள் என்றால் அப்போது நிலை உயரம்

$$= 0$$

$$0 = 15\,t - \tfrac{1}{2}\,gt^2$$

$$\therefore\ t = \frac{30}{g} \text{ விநாடிகள்}$$

(3) கிடை வீச்செல்லையைக் கண்டுபிடிக்க, $\frac{30}{g}$ விநாடிகளில் கிடை திசை வேகமாகிய $15\sqrt{3}$ செ. மீ./விநாடி சமச்சீராக இருப்பதால்

கிடைவீச்செல்லை $= \frac{30}{g} \times 15\sqrt{3} = \frac{450\sqrt{3}}{g}$ செ. மீ.

(4) 15 செ. மீ. உயரத்தில், துகள் அடையும் நிலைதிசை வேகம் 'V' என்றால்

$$V^2 - 15^2 = -2\,g.15$$
$$V^2 = 225 - 30g$$
$$\therefore\quad V = \sqrt{225-30g}$$

கிடைதிசை வேகம் மாறுதலில்லாமலிருப்பதால்

அது $= 15\sqrt{3}$ செ. மீ./விநாடி.

கிடைதிசையுடன் துகள் 15 செ. மீ. உயரத்தில் இயங்கும் திசை θ கோணத்தை உண்டாக்கினல்

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{225-30g}}{15\sqrt{3}}$$

மேலும் விளைவு வேகம் $= 225 - 30g + 225\times 3$

$= 4\times 225 - 30g$

$= 900 - 30g$ செ. மீ./விநாடி.

2. கிடைதிசையுடன் $\tan^{-1} 3$ கோணம் உண்டாகும் வகையில் ஒரு பொருள் விநாடிக்கு 80 அடி திசைவேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. பொருள் 90 அடி நிலை உயரத்தையடைகிறதெனவும், பறக்கும் நேரம் ஏறக்குறைய $4\frac{3}{4}$ விநாடிகளெனவும் காண்பி. வீச்சுப் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்தின்மேல், வீச்செல்லையையும் கண்டுபிடி.

இங்கு $U = 80$ $\qquad \alpha = \tan^{-1} 3$

$$\therefore\quad \tan\alpha = 3$$
$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

பொருள் அடையும் அதிகத் தூரம் $= \dfrac{U^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$$= \overset{5}{\cancel{80}} \times \overset{\overset{2}{\cancel{20}}}{\cancel{80}} \times \frac{3\times 3}{\cancel{10}} \times \frac{1}{\underset{2}{\cancel{2}\times\cancel{32}}}$$

$= 90$ அடி.

பறக்கும் நேரம் $= \dfrac{2U\sin\alpha}{g}$

$$= \cancel{2} \times \overset{5}{\cancel{80}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\underset{2}{\cancel{32}}}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{15}{10}\sqrt{10}$$

$= \frac{3}{2} \times 3{\cdot}162$ (ஏறக்குறைய)

$= 4{\cdot}743$ விநாடிகள்

$= 4\frac{3}{4}$ விநாடிகள் (ஏறக்குறைய)

கிடை வீச்செல்லை $= \dfrac{2U^2 \sin\alpha \,.\, \cos\alpha}{g}$

$$= \frac{\overset{5}{\cancel{2}\times\cancel{80}}\times 80}{\underset{2}{\cancel{32}}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{40\cancel{0}\times 3}{1\cancel{0}}$$

$= 120$ அடிகள்

3. ஒரு துகள் எறியப்படும்போது அடையும் மிக அதிக தூரம், வீச்சுப் புள்ளி வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்தின் மேலுள்ள வீச்செல்லையில் நான்கில் ஒரு பங்கென்றால் வீச்சுக் கோணத்தை கண்டுபிடி.

ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U' எனவும், வீச்சுக்கோணம் 'α' எனவும் கொண்டால் துகள் அடையும் மிக அதிகத் தூரம் $= \dfrac{U^2 \sin^2\alpha}{2g}$

கிடை வீச்செல்லை $= \dfrac{2U^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2g}$

$$\frac{U^2 \sin^2\alpha}{2\cancel{g}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\, U^2 \sin^2\alpha \cos\alpha}{\cancel{g}}$$

$$\tan\alpha = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

4. கிடை நிலையுடன் $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ கோணமுண்டாக்கும் வகையில், விநாடிக்கு. 100 அடி திசைவேகத்துடன் எறியப்படும் துகள் 80 கெஜ தூரத்திலுள்ள 36 அடி உயரச் சுவரை, தொட்டுக்கொண்டு தாண்டுமென காண்பி.

துகளின் பாதை $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2U^2 \cos^2\alpha}$

$$= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2U^2}\;[1+\tan^2\alpha]$$

இங்கு $U = 100$, $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$$\therefore\ y = x\tfrac{3}{4} - \frac{32 \times x^2}{2 \times 100^2}\ \left(1 + \tfrac{9}{16}\right)$$

$$= \frac{3x}{4} - \frac{16}{100 \times 100} \times \frac{25}{16} \cdot x^2 = \frac{3x}{4} - \frac{x^2}{400}$$

4

சுவரின் மேல்பாகத்தின் அச்சு தூரங்களை (240, 36) என்று கொள்ளலாம்.

$x = 240$ ஆக இருக்கும்போது

60 6

$$y = \frac{3 \times 240}{4} - \frac{240 \times 240}{400}$$

$$= 180 - 144$$

$$= 36$$

எனவே துகள் சுவரைத் தாண்டும்.

5. 30° வீச்சுக் கோணத்தில் 128 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்துடன் எறியப்படும் ஒரு கல், 48 அடி உயரத்தையடைய எவ்வளவு நேரமாகும்?

நிலைதிசை வேகம் $= 128 \times \sin 30°$

$= 64$ அடி/விநாடி

இந்தத் திசைவேகம் 'g' என்ற எதிர்முடுக்கத்துக்குக் கட்டுப்பட்டிருக்கும்.

$$\therefore\ 48 = 64t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$= 64t - 16t^2$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$t = 1$ அல்லது 3.

கல் வீசப்பட்ட 1 விநாடி கழிந்து, கல் 48′ உயரம் சென்றிருக்கும். மீண்டும் 3 விநாடிகள் கழிந்து, கல் 48′ உயரத்தையடையும்.

6. 18′ உயர 'கோல்' கம்பத்தின் முன்னே, 4 கெஜ தூரத்திலிருந்து உதைக்கப்படும் ஒரு கால்பந்து 'கோல்' மேல் கம்பத்திற்குச் சற்றுக் கீழே சென்று, கோல் கம்பத்துக்குப் பின்னே 2 கெஜ தூரத்தில் விழுகிறது. பந்து இயங்கும் பாதை, கோல் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருந்தால், வீச்சுத் திசைவேகம் $12\sqrt{5}$ அடி/விநாடி எனக் காண்பி.

ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U' எனவும், வீச்சுக் கோணம் 'α' எனவும் கொண்டால், பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2\alpha}$$ என்பது தெரியும்

கோலின் மேல் கம்பத்தில் பந்து நுழையும் புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் (12, 8) ஆகிறது. இது வீச்சுப் பாதையில் அமைய வேண்டும்.

$$8 = 12 \tan\alpha - \frac{\overset{16}{\cancel{32}} \times 144}{\cancel{2} \times U^2}(1+\tan^2\alpha) \qquad (1)$$

$$\text{கிடை வீச்செல்லை} = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$= 18$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \text{ ஆதலால்}$$

$$\frac{U^2 \tan\alpha}{16(1+\tan^2\alpha)} = 18$$

$$\frac{16(1+\tan^2\alpha)}{U^2} = \frac{\tan\alpha}{18} \qquad (2)$$

∴ (1) சமன்பாடு

$$8 = 12\tan\alpha - \frac{\overset{8}{\cancel{144}} \times \tan\alpha}{\cancel{18}}$$

$$= 4\tan\alpha$$

என்றாகிறது.

∴ $\tan\alpha = 2$.

(2) சமன்பாட்டில் $\tan\alpha$-க்கு 2 என்ற மதிப்பை அளித்தால்

$$U^2 = \frac{\overset{9}{\cancel{18}} \times 16(1+4)}{\cancel{2}}$$

$$\therefore\ U = 3\times4\sqrt{5}$$

$$= 12\sqrt{5} \text{ அடி/விநாடிகள்}$$

7. ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U'-யுடன் எறியப்படும் ஒரு துகள் வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து d தூரத்திலுள்ள ஒரு சுவரின் மேல் எய்தும் மிக அதிகத் தூரம்

$$\frac{U^2}{2g} - \frac{gd^2}{2U^2}$$ என நிரூபி.

அப்போது வீச்சுப் பாதையில் துகள் அடையும் அதிக உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

வீச்சுக் கோணம் 'α' என்றால், வீச்சுப் பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \text{ என்றாகும்.}$$

$x = d$ என்றால்

$$y = d \tan \alpha - \frac{gd^2}{2U^2}(1+\tan^2\alpha)$$

$$= d.t - \frac{gd^2}{2U^2}(1+t^2) \quad [t = \tan \alpha \text{ என்க.}]$$

'd'-ம், 'U'-ம் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் 'y' என்பது 'α'-ன் அல்லது 't'-ன் ஒரு சார்பலனாகும். எனவே 'y'-ன் உச்சத்தைக் காண,

$$\frac{dy}{dt} = 0 \text{ ஆகவும்}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \text{குறை குறியுடன் இருக்க வேண்டும்}$$

$$0 = \frac{dy}{dt}$$

$$= d - \frac{gd^2}{2U^2} 2t$$

$$\therefore \; t = \frac{U^2}{gd}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{gd^2}{U^2}$$

$$= \text{குறை குறியுடன் உள்ளது.}$$

எனவே $t = \frac{U^2}{gd}$ என்ற மதிப்புக்கு y உச்சத்தை அடையும்

$$\text{உச்ச மதிப்பு } y = d\,\frac{U^2}{gd} - \frac{gd^2}{2U^2}\left(1 + \frac{U^4}{g^2d^2}\right)$$

$$= \frac{U^2}{g} - \frac{gd^2}{2U^2} - \frac{U^2}{2g}$$

$$= \frac{U^2}{2g} - \frac{gd^2}{2U^2}$$

அப்போது

வீச்சுப் பாதையில் துகள் அடையும் மிக அதிக தூரம்

$$= \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$= \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{1}{1+\cot^2 \alpha}$$

$$= \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{1}{1+\frac{g^2 d^2}{U^4}}$$

$$= \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{U^4}{U^4+g^2 d^2}$$

$$= \frac{U^6}{2g\,(U^4+g^2 d^2)}$$

8. 48 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. வீச்சுப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் கிடைசமதளத்தின்மேல் உச்ச வீச்செல்லையைக் கண்டுபிடிக்க. மேலும் 36 அடி வீச்செல்லையை அடைய வேண்டிய இரண்டு எறிதிசைகளையும் கண்டுபிடிக்க.

வீச்சுக் கோணம் 'α' என்றால், ஆரம்பத் திசைவேகத்தின் நிலை, கிடை கூறுகள் முறையை 48 $\sin \alpha$, 48 $\cos \alpha$ என்றாகும்.

't' என்பது பறக்கும் நேரமென்றால், அந் நேரத்தில் துகள் இயங்கும் நிலைதூரம் '0' ஆகும்.

$$0 = 48 \sin \alpha . t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore\ t = 48 \sin \alpha \times \frac{2}{g}$$

$$= \overset{3}{\cancel{48}} \sin \alpha \times \frac{2}{\underset{16}{\cancel{32}}}$$

$$= 3 \sin \alpha .$$

இந்நேரத்தில் துகள் இயங்கும் கிடைதூரம்

$$= 48 \cos \alpha . t$$

$$= 48 \cos \alpha \times 3 \sin \alpha$$

$$= 72 \sin 2\alpha$$

இந்தத் தூரம் உச்சத்திலிருக்க $\sin 2\alpha = 1$ ஆக வேண்டும்.

$2\alpha = 90°$ அல்லது $\alpha = 45°$

$\alpha = 45°$ ஆகும் போது

உச்ச வீச்செல்லை = 72 அடிகள்

வீச்செல்லை 36 அடிகள் ஆகும் போது

$$72 \sin 2\alpha = 36$$

$$\sin 2\alpha = \tfrac{1}{2}$$

$$2\alpha = 30°, \text{ அல்லது } 150°$$

$$\therefore \alpha = 15° \text{ அல்லது } 75°$$

9. கிடைநிலையுடன் $\sin^{-1}\frac{1}{8}$ கோணமுண்டாக்கும் வகையில், ஒரு வெடிகுண்டு விநாடிக்கு 1280 அடிகள் திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படுகிறது. கிடைதளத்தின்மேல் வீச்செல்லை, பறக்கும் நேரம், குண்டு அடையும் மிக அதிக உயரம் இவைகளைக் கண்டுபிடி.

ஆரம்பத் திசைவேகம் $= 1280 \times \cos [\sin^{-1}\frac{1}{8}]$

$$= \frac{\overset{160}{\cancel{1280}} \times \sqrt{63}}{8}$$

$= 160\sqrt{63}$ அடிகள்/விநாடி

ஆரம்ப நிலைதிசை வேகம் $= \overset{160}{\cancel{1280}} \times \frac{1}{8}$

$= 160$ அடிகள்/விநாடி.

மிக அதிக உயரத்தை அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் 't' விநாடிகள்; இந்நேரத்தில் நிலைதிசை வேகம் '0' ஆகிறது.

$$0 = 160 - gt$$

$$\therefore t = \frac{160}{32}$$

$= 5$ விநாடிகள்

இந்த 5 விநாடிகளில் நிலைதிசையில் குண்டு இயங்கும் தூரம்

$$= 160 \times 5 - \tfrac{1}{2} \times 32 \times 5^2$$

$$= 800 - 16 \times 25$$

$= 400$ அடிகள்

வீச்செல்லையயடைய 10 விநாடிகள் பிடிக்கும்

அப்போது குண்டு இயங்கும் கிடைதூரம்,

$$= 160 \times \sqrt{63} \times 10$$

$$= 1600 \times \sqrt{63}$$

$= 12700$ அடிகள் [ஏறக்குறைய]

10. எறிபொருளுக்கு 'b' தூரத்திலுள்ள 'a' உயரமான ஒரு சுவரையும் அதற்கு இணையாக 'a' தூரத்திலுள்ள 'b' உயரமான மற்றொரு சுவரையும் தொட்டுக்கொண்டு ஒரு துகள் தாண்டுகிறது. எறிபாதை சுவரின் திசைக்குச் செங்குத்தாக இருந்தால், கிடை சமதளத்தில் வீச்செல்லையைக் கண்டுபிடி.

ஆரம்பத் திசைவேகம், 'U' என்றும், வீச்சுக் கோணம் 'α' என்றும் கொண்டால், வீச்சுப் பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \qquad \ldots\ldots(1)$$

சுவரின் மேல்பாகத்தில் மேற்கண்ட பாதையிலுள்ள புள்ளிகளின் அச்சு தூரங்கள் (b, a), (a, b) ஆகும்.

$$\text{எனவே } a = bt - \frac{gb^2}{2U^2}(1+t^2) \ldots\ldots(2) \qquad [t = \tan \alpha \text{ என்க}]$$

$$b = at - \frac{ga^2}{2U^2}(1+t^2) \ldots\ldots(3)$$

$$(2)' \equiv a - bt = -\frac{gb^2}{2U^2}(1+t^2)$$

$$(3)' \equiv b - at = -\frac{ga^2}{2U^2}(1+t^2)$$

$$\therefore \frac{a-bt}{b-at} = \frac{b^2}{a^2} \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$a^3 - a^2bt = b^3 - ab^2t$$

$$ab(b-a)t = b^3 - a^3$$

$$\therefore t = \frac{b^2 + a^2 + ab}{ab}$$

$$\tan \alpha = t = \frac{(a-b)^2 + 3ab}{ab}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{ab} + 3$$

$$\therefore > 3 \quad \left[\frac{(a-b)^2}{ab} \text{ நிறை குறியுடையாதலால்}\right]$$

$$\therefore \alpha > \tan^{-1} 3$$

$$\text{கிடைவீச் செல்லை} = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$= \frac{2U^2 t}{g(1+t^2)}$$

சமன்பாடு (2)-லிருந்து

$$\frac{g(1+t^2)}{2U^2} = \frac{bt-a}{b^2}$$

$$\frac{g(1+t^2)}{2U^2 t} = \frac{1}{b^2 t}(bt-a)$$

(4)லிருந்து t-ன் மதிப்பை இதற்கிட்டு

$$\frac{g(1+t^2)}{2U^2 t} = \frac{1ab}{b^2(b^2+a^2+ab)}\left[\frac{b^2+a^2+ab}{a} - a\right]$$

$$= \frac{a}{b(b^2+a^2+ab)}$$

$$= \frac{b^2+ab}{b(a^2+b^2+ab)}$$

$$= \frac{a+b}{a^2+b^2+ab}$$

$\therefore$ கிடைவீச்செல்லை $= \dfrac{a^2+b^2+ab}{a+b}$

11. கொடுக்கப்பட்ட வீச்செல்லை R-ஐ அடைய, 'U' என்ற ஆரம்பத் திசைவேகத்துடன் இயங்கும் இரு துகள்கள் அடையும் மிக அதிக உயரங்கள் 'h', 'H' என்றால் $16hH = R^2$ என்று நிரூபி.

$$R = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$\therefore$ $\sin 2\alpha$ = மாறிலியாகும்.

$2\alpha = \theta$ அல்லது $180-\theta$ ஆகும்.

$\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ அல்லது $90 - \dfrac{\theta}{2}$.

அப்போது மிக அதிக உயரம்.

$$h = \frac{U^2}{2g}\sin^2\alpha$$

$$= \frac{U^2}{2g}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$H = \frac{U^2}{2g}\sin^2\left(90-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{U^2}{2g}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$16h\,H = 16\frac{U^4}{4g^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 4\frac{U^4}{g^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{U^4}{g^2}\sin^2\theta$$

$$= \left[\frac{U^2\sin\theta}{g}\right]^2 \quad \left[\alpha = \frac{\theta}{2} \text{ என்பதால் } 2\alpha = \theta \text{ ஆகிறது}\right]$$

$$= R^2$$

12. தரையைத் தொட்டவுடன் வெடிக்கும் ஒரு குண்டின் சிறு துண்டுகள் நாலா பக்கமும் சிதறுகின்றன. சிதறும் குண்டுகளின் மிக அதிகமான திசைவேகம் 80 அடிகள்/விநாடி. 100′ எட்டதூரத்தில் உள்ள ஒரு மனிதன் $\frac{5}{\sqrt{2}}$ விநாடிகளுக்கு அபாயத்திலிருப்பானெனக் காண்பி.

$$U = 80 \qquad R = 100$$

$$R = \frac{U^2\sin 2\alpha}{g}$$

40 5

$$100 = \frac{80\times 80}{32}\sin 2\alpha$$

2

$$\sin 2\alpha = \tfrac{1}{2}$$

$$2\alpha = 30^\circ, 150^\circ$$

$$\alpha = 15^\circ, 75^\circ$$

எனவே இரண்டு வீச்சுக் கோணங்களுண்டு.

வீச்சுக் கோணம் 15° ஆக இருக்கும்போது, கொடுக்கப்பட்ட வீச்செல்லையையடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்,

$$t_1 = \frac{2U\sin\alpha}{g}$$

5

$$= \frac{2\times 80}{32}\times\sin 15^\circ$$

2

$$= 5\times\sin 15^\circ$$

கோணம் 75° ஆகும்போது எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்,

$$t_2 = \frac{\frac{2 \times 80}{32}}{2} \times \sin 75^\circ$$

$$= 5 \times \sin 75^\circ$$

எனவே அபாயத்துக்குரிய நேரம்

$$= 5 \sin 75 - 5 \sin 15$$

$$= 5 \times 2 \cos 45 \sin 30$$

$$= 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \tfrac{1}{2}$$

$= 5\sqrt{2}$ விநாடிகள்

13. விநாடிக்கு 64 அடிகள் வேகத்தில் எறியப்படும் ஒரு கல், அதற்கு நேர் எதிராக 48 அடி தூரத்திலுள்ள ஒரு சுவரின் 19 அடி உயரத்திலுள்ள ஒரு பொருளைச் சென்று அடைகிறது. அப்படியானால் வீச்சுத்திசை, பொருளைத் தொடும்போது கல்லுக்குள்ள திசைவேகம் இவைகளைக் கண்டுபிடி.

'α' வீச்சுக் கோண மென்றால், கிடை, நிலை, திசைவேகங்கள் முறையே $64 \cos \alpha$, $64 \sin \alpha$ ஆகும்.

$$\therefore \quad 48 = 64 \cos \alpha . t$$

$$19 = 64 \sin \alpha . t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore \quad 19 = \sin \alpha \frac{48}{\cos \alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{48}{64 \cos \alpha}\right)^2$$

$$19 = 48 \tan \alpha - \frac{9}{2}(1 + \tan^2 \alpha)$$

$\therefore \; 9t^2 - 48t + 28 = 0 \qquad (t = \tan \alpha$ என்று கொண்டால்)

$$9t^2 - 42t - 6t + 28 = 0$$

$$3t(3t - 14) - 2(3t - 14) = 0$$

$$(3t - 2)(3t - 14) = 0$$

$\therefore \; \tan \alpha = t = \frac{2}{3}$ அல்லது $\frac{14}{3}$

அப்போது கல்லின் கிடை, நிலை திசை வேகக் கூறுகள் முறையே

$$64 \cos \alpha, \quad 64 \sin \alpha - gT$$

$$= 64 \cos \alpha, \quad 64 \sin \alpha - \frac{32 \times 48}{64} \sec \alpha$$

$$= 64 \cos \alpha, \quad 64 \sin \alpha - 24 \sec \alpha$$

எனவே விளைவு திசைவேகம்

$$= \sqrt{64^2 \cos^2\alpha + (64 \sin\alpha - 24 \sec\alpha)^2}$$

$$= \sqrt{64^2 + 24^2 \sec^2\alpha - 2 \times 24 \times 64 \tan\alpha}$$

$\tan\alpha = \frac{2}{3}$ ஆகும்போது,

$$\text{திசைவேகம்} = \sqrt{4096 + 576(1 + \tfrac{4}{9}) - 128 \times \overset{8}{24} \times \frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{4096 + \frac{\overset{64}{576} \times 13}{9} - 2048}$$

$$= \sqrt{2048 + 832}$$

$$= \sqrt{2900}$$

$= 10\sqrt{29}$ அடிகள்/விநாடி.

$\tan\alpha = \frac{14}{3}$ ஆகும்போது,

$$\text{திசைவேகம்} = \sqrt{4096 + 576(1 + \tfrac{196}{9}) - 128 \times \overset{8}{24} \times \frac{14}{3}}$$

$$= \sqrt{4096 + 64 \times 205 - 14336}$$

$$= \sqrt{4096 + 13120 - 14336}$$

$$= \sqrt{17216 - 14336}$$

$$= \sqrt{2880}$$

$= 12\sqrt{20}$ அடிகள்/விநாடி.

அப்போது திசை வேகத்தின் திசைகள் முறையே

$$\tan\theta = \frac{64 \sin\alpha - 24 \sin\alpha}{64 \cos\alpha}$$

$$= \tan\alpha - \tfrac{3}{8}\,[1 + \tan^2\alpha]$$

$\tan\alpha = \frac{2}{3}$ என்றால்	$\tan\alpha = \frac{14}{3}$ என்றால்
$\tan\theta = \frac{2}{3} - \frac{3}{8}\left(1 + \frac{4}{9}\right)$	$\tan\theta = \frac{14}{3} - \frac{3}{8}\left(1 + \frac{196}{9}\right)$
$= \frac{2}{3} - \frac{3}{8} \times \frac{\overset{13}{\cancel{9}}}{3}$	$= \frac{14}{3} - \frac{3}{8} \times \frac{\overset{205}{\cancel{9}}}{3}$
$= \frac{3}{24}$	$= -\frac{93}{24}$

இங்கு விளைவு திசைவேகம் கிடைதிசையுடன் உண்டாக்கும் கோணம் θ ஆகும்.

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\frac{3}{24}$ அல்லது $180° - \tan^{-1}\frac{93}{24}$ ஆகும்.

14. வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து 'a' கிடைதூரத்திலும் 'b' நிலை தூரத்திலும் P என்ற புள்ளியுள்ளது. ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U'-யுடன் செலுத்தப்படும் எறிபொருள் P-ன் வழியாகச் செல்லவேண்டுமானால் $U^2 \not< g\,[b+\sqrt{a^2+b^2}]$-ஆக இருக்கவேண்டுமெனக் காண்பி.

(a, b) அச்சு தூரங்களுடைய P என்ற புள்ளி எறிபாதையின் மேலிருக்க வேண்டுமானால்,

$$b = a \tan \alpha - \frac{ga^2}{2U^2}(1+\tan^2 \alpha)$$

$$ga^2t^2 - 2U^2at + (ga^2+2U^2b) = 0 \quad [t = \tan \alpha \text{ என்றால்}]$$

இந்தச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யாக இருக்க இதன் தன்மை காட்டி $\geqslant 0$ ஆக வேண்டும்.

$$4U^4a^2 - 4ga^2(ga^2+2U^2b) \geqslant O$$

$$U^4 - 2gbU^2 - a^2g^2 \geqslant O$$

$$(U^2-gb)^2 \geqslant a^2g^2+g^2b^2$$

$$(U^2-gb)^2 \geqslant g^2(a^2+b^2)$$

$$U^2 - gb \geqslant g\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore\ U^2 \geqslant g\,[b+\sqrt{a^2+b^2}]$$

குறிப்பு : $U^2 < g[b+\sqrt{a^2+b^2}]$ என்றால் சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி <0 ஆகும்.

$\therefore$ மூலங்கள் மெய்யானவை ஆக இருக்காது.

15. 'U', 'V' என்ற திசை நிலை கூறுகளையுடைய திசைவேகத் துடன் ஒரு குண்டு சுடப்படுகிறது. 't' நேரங்கழித்து அதன் இடத் தைக் கண்டுபிடி. கிடை திசைவேகம் விநாடிக்கு 2000 அடிகள் என்றால், 500 கெஜ தூரத்தில் குண்டை விட 6 அடிகள் அதிக உயர முள்ள ஒரு பொருளை சுடவேண்டுமானால், குண்டு சுடப்படும் ஏற்றக் கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

't' நேரங்கழித்துக் குண்டின் இடத்தை (x, y) என்ற அச்சுத் தூரத்தால் குறிப்பிட்டால்

$$x = Ut$$

$$y = Vt - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$U = 2000 \text{ என்றால்}$$

$$x = Ut$$

$$1500 = 2000t$$

$$\therefore\ t = \frac{3}{4} \text{ விநாடி}$$

$$y = Vt - \frac{1}{2}gt^2$$

$$6 = V.\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\times 32 \times \frac{9}{16}$$

$$15 = V.\frac{3}{4}$$

$\therefore V = 20$ அடிகள்/விநாடி

'θ' ஏற்றக் கோணமானுல்

$$\tan\theta = \frac{V}{U}$$

$$= \frac{20}{2000}$$

$$= \frac{1}{100}$$

$\therefore \theta = 3\frac{1}{2}$ நிமிடங்கள் (ஏறக்குறைய)

16. 'O' என்ற புள்ளியிலிருந்து, ஒரே திசைவேகத்துடன் இரண்டு எறிபொருள்கள் 'α', 'β' என்ற வீச்சுக் கோணங்களுடன் இயங்கி 'O'-ன் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியை நோக்கிச் செல்லுகின்றன. முதல் பொருள் புள்ளிக்கு a அடிகள் முன்னே விழுகிறது. இரண்டாவது பொருள் புள்ளியைத் தாண்டி 'b' அடிகள் தள்ளி விழுகிறது. புள்ளியில் பொருள் வந்து சேர சரியான வீச்சுக் கோணம் θ என்றுல்

$$(a+b)\sin 2\theta = a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha$$

என்று நிரூபி.

ஆரம்பத் திசைவேகம் U அடிகள்/விநாடி என்றும், d அடிகள் தூரத்தில் புள்ளி இருப்பதாகவும் எடுத்துக்கொள்ளுவோம்.

$$\text{வீச்செல்லே} = \frac{U^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\therefore d - a = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$d + b = \frac{U^2 \sin 2\beta}{g}$$

$$d = \frac{U^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\therefore a + \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{U^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$a = \frac{U^2}{g}[\sin 2\theta - \sin 2\alpha]$$

$$\frac{U^2 \sin^2 \beta}{g} = \frac{U^2 \sin 2\theta}{g} + b$$

$$b = \frac{U^2}{g} [\sin 2\beta - \sin 2\theta]$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin 2\theta - \sin 2\alpha}{\sin 2\beta - \sin 2\theta}$$

$$a \sin 2\beta - a \sin 2\theta = b \sin 2\theta - b \sin 2\alpha$$

$$a \sin 2\beta + b \sin 2\alpha = (a+b) \sin 2\theta$$

17. 'U', 'V' என்பவைகளைக் கிடை, நிலைகூறுகளாகவுடைய திசை வேகத்துடன் ஒரு பொருள் எறியப்படுகிறது. வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து 'h' என்ற கிடை தூரமும் 'K' என்ற நிலைதூரமுமுள்ள ஒரு புள்ளியை எறிபொருள் சென்று அடைகிறது. $2U^2K + gh^2 = 2UVh$ என்று நிரூபி.

புள்ளியை எறிபொருள் சென்று அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் t என்றால்

$$h = Ut$$

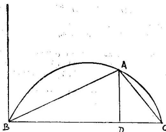
$$K = Vt - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \quad K = V \cdot \frac{h}{U} - \frac{g}{2}\frac{h^2}{U^2}$$

$$2U^2K = 2UVh - gh^2$$

$$\therefore \quad 2U^2K + gh^2 = 2UVh$$

18. BCஐ கிடைநிலையிலுள்ளதாக ABC என்ற ஒரு முக்கோண முள்ளது. B-யிலிருந்து எறியப்படும் ஒருபொருள் Aஐத் தொட்டுக் கொண்டு சென்று Cஐ அடைகிறது. வீச்சுக்கோணம் θ என்றால் $\tan \alpha = \tan B + \tan C$ என்று காண்பி.



படம் 63.

ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U' என்றும் எறிபொருள் Aஐ அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் 't' என்றும் இருந்தால்,

$$BD = U\cos\alpha \,.\, t$$

$$\therefore \quad DA = U\sin\alpha \,.\, t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \quad \tan B = \frac{DA}{BD}$$

$$= \frac{U\sin\alpha \,.\, t - \frac{1}{2}gt^2}{U\cos\alpha \,.\, t}$$

$$= \frac{U\sin\alpha - \frac{1}{2}gt}{U\cos\alpha}$$

$$= \tan\alpha - \frac{gt\sec\alpha}{2U} \qquad \text{......(1)}$$

$$BC = \text{வீச்செல்லை}$$

$$= \frac{U^2\sin 2\alpha}{g}$$

$$\tan C = \frac{DA}{DC}$$

$$= \frac{U\sin\alpha \,.\, t - \frac{1}{2}gt^2}{\frac{U^2\sin 2\alpha}{g} - U\cos\alpha \,.\, t}$$

$$= \frac{gt[U\sin\alpha - \frac{1}{2}gt]}{U\cos\alpha[2U\sin\alpha - gt]}$$

$$= \frac{gt}{2U\cos\alpha} = \frac{gt}{2U} \,.\, \sec\alpha \qquad \text{......(2)}$$

(1)+(2) என்றல்

$$\tan B + \tan C = \tan\alpha \text{ ஆகும்.}$$

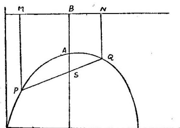
19. வீச்சுப் பாதையின் உச்சியில் எறிபொருளின் திசைவேகம் 'V' என்றும் அதன் குவிய நாணின் இரு முனைகளின் திசைவேகங்கள் 'V_1', 'V_2' என்றும் இருந்தால், $V_1^{-2} + V_2^{-2} = V^{-2}$ என்று நிரூபி.

'S' என்பது எறிபொருள் பாதையான பரவளைவின் குவியமாகும். MN அதன் இயக்குவரையாகும்.

$$\therefore \quad SP = PM$$

$$SQ = QN$$

$$SA = AB$$



படம் 64.

PSQ, குவிய நாண் என்றால்

$$\frac{1}{SP}+\frac{1}{SQ}=\frac{1}{SA} \text{ ஆகும்} \qquad \ldots\ldots(1)$$

எறிபொருளின் பாதையிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் திசைவேகம், அதற்கு நேர் உயரே இயக்குவரையிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து தங்கு தடையின்றிப் பொருள் விழும்போது உண்டாகும் திசைவேகத்துக்குச் சமமென நாம் அறிவோம்.

எனவே $V_1^2 = 2g \, . \, PM$

$= 2g \, . \, SP$

$V_2^2 = 2g \, . \, QN$

$= 2g \, . \, SQ$

$V^2 = 2g \, . \, AB$

$= 2g \, . \, SA$

(1) சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\frac{2g}{V_1^2}+\frac{2g}{V_2^2}=\frac{2g}{V^2}$$

$V_1^{-2}+V_2^{-2} = V^{-2}$ ஆகும்.

20. ஒரு பையன் 'U' திசைவேகத்துடன் 'α' ஏற்றக் கோணத்தில் ஒரு கல்லை வீசுகிறான். சில விநாடிகள் கழித்து, 'V' திசைவேகத்துடன் β ஏற்றக் கோணத்தில் மற்றொரு கல்லை வீசுகிறான். இரண்டாவது

கல், முதல் கல்லைத் தட்டவேண்டுமானல், இரண்டு கற்கள் வீசப்படும் நேரங்களுக்கிடையேயுள்ள இடைவெளி நேரத்தைக் கண்டுபிடி.

முதல் கல் எறியப்பட்ட நேரத்திலிருந்து 't' விநாடிகள் கழித்து, முதல் கல் இரண்டாவது கல்லைச் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். இரண்டு கற்கள் வீசப்படும் நேரங்களுக்கிடையேயுள்ள இடைவெளி 'T' விநாடிகள் என்றும் கொள்வோம்.

இரண்டு கற்கள் சந்திக்கும் இடத்தின் அச்சு தூரங்களை (x, y) என்று கொண்டால்

$$x = U \cos \alpha \, . \, t \qquad \ldots\ldots(1)$$
$$y = U \sin \alpha \, . \, t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \ldots\ldots(2)$$
$$x = V \cos \beta \, . \, (t - T) \qquad \ldots\ldots(3)$$
$$y = V \sin \beta \, . \, (t - T) - \tfrac{1}{2}g\,(t - T)^2 \qquad \ldots\ldots(4)$$

(1), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$U \cos \alpha \, . \, t = V \cos \beta \, . \, (t - T)$$
$$V \cos \beta \, . \, T = t\,(V \cos \beta - U \cos \alpha)$$
$$\therefore \quad t = \frac{V \cos \beta \, . \, T}{V \cos \beta - U \cos \alpha} \qquad \ldots\ldots(5)$$

(2), (4) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$U \sin \alpha \, . \, t - \tfrac{1}{2}gt^2 = V \sin \beta \, . \, (t - T) - \tfrac{1}{2}g\,(t - T)^2$$
$$t\,(U \sin \alpha - V \sin \beta) + V \sin \beta \; T = \tfrac{1}{2}g\,[t^2 - t^2 + 2t\,T - T^2]$$

(5)-லுள்ள 't' மதிப்பைக் கொண்டு

$$\frac{(U \sin \alpha - V \sin \beta) \, . \, V \cos \beta \, . \, T}{V \cos \beta - U \cos \alpha} + V \sin \beta . \, T$$
$$= \frac{1}{2}g\left[\frac{2T \, . \, V \cos \beta . \, T}{V \cos \beta - U \cos \alpha} - T^2\right]$$

$$\frac{(U \sin - V \sin \beta) \, . \, V \cos \beta}{(V \cos \beta - U \cos \alpha)} + V \sin \beta$$
$$= \frac{1}{2}gT\left[\frac{2V \cos \beta - V \cos \beta + U \cos \alpha}{V \cos \beta - U \cos \alpha}\right]$$

$$UV\,[\sin \alpha \, . \, \cos \beta - \cos \alpha \, . \, \sin \beta]$$
$$= \frac{1}{2}gT\,[V \cos \beta + U \cos \alpha]$$

$$UV \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}gT\,[V \cos \beta + U \cos \alpha]$$

$$\therefore \quad T = \frac{2\,UV \sin(\alpha - \beta)}{g\,(V \cos \beta + U \cos \alpha)}$$

21. ஒரே நிலை சமதளத்தில், ஒரு புள்ளியிலிருந்து, வீசப்படும் துகள்கள் சமபரவளைவுப் பாதைகளில் இயங்கினால், அவைகளின் குவியங்கள், வேறொரு பரவளைவின் மேலிருக்குமெனக் காண்பி.

பரவளைவுகளின் செவ்வகலங்கள்

$= \dfrac{2\,U^2 \cos^2 \alpha}{g}$ = மாறிலி என்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

எனவே $= K$ என்று கொள்ளவும்.

பரவளைவுகளின் குவியங்களின் அச்சு தூரங்கள் முறையே

$$\frac{U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{g} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad x = \sin \alpha . \frac{K}{2 \cos^2 \alpha} . \cos \alpha$$

$$= \frac{K}{2} \tan \alpha$$

$$y = \sin^2 \alpha . \frac{K}{2 \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{K}{2} . \tan^2 \alpha$$

$$\therefore \quad \frac{2y}{K} = \left(\frac{2x}{K}\right)^2$$

$$y = \frac{2x^2}{K}$$

∴ குவியங்கள் ஒரு பரவளைவின்மேல் அமையும்.

22. 256 அடி உயரமுள்ள மலை உச்சியிலிருந்து 30° வீச்சுக் கோணத்தில் 192 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்துடன் ஒரு பொருள் எறியப்படுகிறது. அது மலையிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் விழுமென்று கண்டுபிடி.

ஆரம்ப நிலை திசைவேகம் $= 192 \sin 30°$

$= 96$

ஆரம்பக் கிடை திசை வேகம் $= 192 \cos 30$

$= 96 . \sqrt{3}$

256 அடிகள் நிலைதூரத்தை அடைய

$$-256 = 96 . t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$= 96t - 16t^2$$

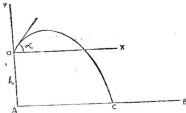
$$t^2 - 6t - 16 = 0$$

$$(t+2)\ (t-8) = 0$$
$t = 8$ விநாடிகள்
$t = -2$ என்றிருக்கமுடியாது
இந்த நேரத்தில் கிடைதூரம் $= 96 \,.\, \sqrt{3} \times 8$
$= 768 \times \sqrt{3}$
$= 1330$ அடிகள் [ஏறக்குறைய]

23. மலை உச்சியிலிருந்து 200 அடிகள் கிடைதூரமும், 200 அடிகள் நிலைதூரமும் கீழேயுள்ள ஒரு பொருளைத் தொடும்படி, மலை உச்சியிலிருந்து ஓர் எறிபொருள் வீசப்படுகிறது. ஓய்விலிருந்து பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்திக்குக் கட்டுப்பட்டு 100 அடிகள் உயரத்திலிருந்து விழும் போது ஏற்படும் திசைவேகத்துடன் எறிபொருள் வீசப்படுகிறது. அப்போது உண்டாகும் வீச்சுத் திசைகள் இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வுள்ளனவென்று காண்பி.

100 அடிகள் உயரத்திலிருந்து விழும்போது
$$U^2 = 2g \times 100$$
$$= 6400$$
$$\therefore\ V = 80$$
திசைக் கோணம் 'α' என்றால்
$$-200 = 80 \sin\alpha \,.\, t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$200 = 80 \,.\, \cos\alpha \,.\, t$$
$$t = \tfrac{5}{2} \sec\alpha$$
$$\therefore\ -200 = 80 \,.\, \tfrac{5}{2} \sec\alpha \sin\alpha - 16 \,.\, \tfrac{25}{4} \sec^2\alpha$$
$$= 200 \tan\alpha - 100\,(1+\tan^2\alpha)$$
$t^2 - 2t - 1 = 0$ [$t = \tan\alpha$ என்றால்]
$$t = 1 \pm \sqrt{2}$$
$t_1 = 1+\sqrt{2},\ t_2 = 1-\sqrt{2}$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்
$$t_1 \,.\, t_2 = -1$$
$\therefore$ வீச்சுத் திசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் $90°$ என்றாகிறது.

24. கிடை சமதளத்திலிருந்து 'h' உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து $\sqrt{2ag}$ என்ற திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. உச்ச வீச்செல்லையையும், அதை அடைவதற்குள்ள ஆரம்ப வீச்சுக் கோணத்தையும் கண்டுபிடி.



படம் 65.

'α' என்பதை ஆரம்ப வீச்சுக் கோணமாகக் கொள்வோம். திசை வேகத்தின் கிடை, நிலை கூறுகள் $\sqrt{2ag}\cos\alpha$, $\sqrt{2ag}\sin\alpha$ ஆகும்.

$$\therefore \quad -h = \sqrt{2ag}\sin\alpha \, . \, t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{......(1)}$$

அப்போது கிடைதூரம் $x = \sqrt{2ag}\cos\alpha \, . \, t \qquad$ ......(2)

(1), (2)-லிருந்து 't'ஐ நீக்குக.

$$-h = \sqrt{2ag}\,\frac{\sin\alpha \, . \, x}{\sqrt{2ag}\cos\alpha} - \frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{2ag\cos^2\alpha}$$

$$= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{4ag}\,(1+\tan^2\alpha)$$

$$= xt - \frac{gx^2(1+t^2)}{4ag} \quad (t = \tan\alpha \text{ என்றால்})$$

'x'-ன் உச்ச மதிப்பைக் காண

$\dfrac{dx}{dt} = 0$ என்றும் $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ குறை குறியுடனும் இருக்கவேண்டும்

$$0 = x + t\,\frac{dx}{dt} - \frac{g}{4ag}\left[x^2\,2t + (1+t^2)2x\,\frac{dx}{dt}\right]$$

$$\frac{dx}{dt}\left[\frac{2gx(1+t^2)}{4ag} - t\right] = x - \frac{2gtx^2}{4ag} = x - \frac{tx^2}{2a}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2ax - tx^2}{2a}\quad\frac{2a}{x(1+t^2) - 2at}$$

$$= \frac{x(2a - tx)}{x(1+t^2) - 2at}$$

$$\therefore\ 2a - tx = 0$$

$$\therefore\ t = \frac{2a}{x}$$

[$\alpha = 90^\circ$ இருக்கும்போது துகள் மேல்நோக்கிச் சென்று பிறகு A-ல் வந்து விழும் ; அப்போது $x = 0$ ஆகும்]

$$-h = x \cdot \frac{2a}{x} - \frac{x^2}{4a}\left(1+\frac{4a^2}{x^2}\right)$$

$$= 2a - \frac{x^2}{4a} - a$$

$$= a - \frac{x^2}{4a}$$

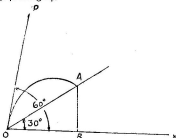
$$\frac{x^2}{4a} = a + h$$

$$x = 2\sqrt{a(a+h)}$$

எனவே உச்ச வீச்செல்லை $= 2\sqrt{a(a+h)}$ ஆகும்

அப்போது $\tan\alpha = \dfrac{2a}{2\sqrt{a(a+h)}} = \sqrt{\dfrac{a}{a+h}}$ ஆகும்.

25. 30° சாய்வுள்ள ஒரு சமதளத்தின் அடியிலிருந்து 60° வீச்சுக் கோணத்துடன் விநாடிக்கு 900 அடிகள் திசைவேகத்தில் ஒரு துகள் வீசப்படுகிறது. சாய்தளத்தின்மேல் வீச்செல்லையையும், பறக்கும் நேரத்தையும் கண்டுபிடி.



படம் 66.

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில், திசைவேகத்தின் கூறு

$= 900 \sin 30°$

$= 450$ அடிகள்/விநாடிகள்

இந்தத் திசையில் முடுக்கம் $= g \cos 30°$

$= 32 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 16\sqrt{3}$ அடிகள்/விநாடி^{2}

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் துகள் செல்லும் தூரம் $= 0$

$$0 = 450t - \tfrac{1}{2}\, 16\sqrt{3} \cdot t^2$$

$$\therefore \quad t = \frac{2 \times 450}{16\sqrt{3}}$$

$= \frac{75\sqrt{3}}{4}$ விநாடிகள் $= 32.5$ விநாடிகள் [ஏறக்குறைய]

இந்நேரத்தில் துகள் இயங்கும் கிடைதூரம்

$$OB = 900 \times \cos 60 \times \frac{75}{4}\sqrt{3}$$

$$= 900 \times \frac{1}{2} \times \frac{75}{4} . \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad OA = OB . \sec 30$$

$$= \frac{\overset{225}{\cancel{900}} \times 75 \times \sqrt{3}}{\underset{4}{\cancel{8}} \times \sqrt{3}} \times 2$$

$= 16{,}875$ அடிகள்

26. 'α' சாய்வு கோணத்தையுடைய சாய்தளத்தின் கீழ்நோக்கி எறிபொருள் ஒரு திசைவேகத்துடன் இயங்கும்போது உண்டாக்கும் உச்ச வீச்செல்லைக்கும் சாய்தளத்தின் மேல்நோக்கி எறிபொருள் அதே திசைவேகத்துடன் இயங்கும்போது ஏற்படும் உச்ச வீச்செல்லைக்கு மிடையேயுள்ள விகிதம் $= (1+\sin \alpha)/(1-\sin \alpha)$ என்று நிரூபி.

வீச்சுத் திசைவேகம் 'U' என்றும், வீச்சுத் திசைக்கும், சாய்தளத் திற்குமிடையேயுள்ள கோணம் θ என்றும் கொள்க. சாய்தளத்துக்குச் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகத்தின் கூறு $U \sin \theta$ ஆகவும், பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினுல் ஏற்படும் முடுக்கின் கூறு $- g \cos \alpha$ ஆகவும் இருக்கும்.

$$\therefore \quad 0 = U \sin \theta . t - \tfrac{1}{2}\, g \cos \alpha \,.\, t^2$$

$$\therefore \quad t = \frac{2U \sin \theta}{g \cos \alpha}$$

இந்நேரத்தில் கிடைதிசையில் துகள் இயங்கும் தூரம்

$$= U\cos(\theta+\alpha)\,\frac{2U\sin\theta}{g.\cos\alpha}$$

∴ எனவே சாய்தளத்தின் மேல் வீச்செல்லை

$$= U\cos(\theta+\alpha)\,\frac{2U\sin\theta}{g\cos\alpha}\,.\sin\alpha$$

$$= \frac{U^2}{g^2\cos^2\alpha}\left[\sin(2\theta+\alpha)-\sin\alpha\right]$$

இந்த வீச்செல்லை உச்சத்தையடைய

$\sin(2\theta+\alpha) = 1$ ஆகவேண்டும்

அப்போது உச்ச வீச்செல்லை $= \dfrac{V^2}{g^2\cos^2\alpha}(1-\sin\alpha)$

சாய்தளத்தின் கீழ்நோக்கி துகள் இயங்கும் போது.

$$0 = U\sin\theta\,.\,t - \tfrac{1}{2}g\cos\alpha\,.\,t^2$$

$$\therefore\ t = \frac{2U\sin\theta}{g\cos\alpha}$$

இந்நேரத்தில் கிடைதிசையில் துகள் இயங்கும் தூரம்

$$= U\cos\ (\theta-\alpha)\,\frac{2\,U\sin\theta}{g\cos\alpha}$$

எனவே சாய்தளத்தின் மேல் வீச்செல்லை

$$= \frac{U\cos(\theta-\alpha)\,2U\sin\theta}{g\cos\alpha}\ \sec\alpha$$

$$= \frac{U^2}{g\cos^2\alpha}\left[2\sin\theta\cos(\theta-\alpha)\right]$$

$$= \frac{U^2}{g\cos^2\alpha}\left[\sin(2\theta-\alpha)+\sin\alpha\right]$$

எனவே இந்த வீச்செல்லை உச்சமாக இருக்க வேண்டுமானல்,
$\sin(2\theta-\alpha) = 1$ ஆகவேண்டும்

அப்போது உச்ச வீச்செல்லை $= \dfrac{U^2}{g\cos^2\alpha}(1+\sin\alpha)$

எனவே உச்ச வீச்செல்லைகளின் விகிதம்

$$= \frac{\dfrac{U^2}{g\cos^2\alpha}(1+\sin\alpha)}{\dfrac{U^2}{g\cos^2\alpha}(1-\sin\alpha)}$$

$$= \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

27. சாய்தளத்தின்மேல் கொடுக்கப்பட்ட வீச்செல்லையை அடைய துகள் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரங்கள் 't_1' அல்லது 't_2' என்றால்

$t_1^2+t_2^2+2t_1\ t_2 \sin \alpha$ என்பது 'α'ஐ பொறுத்ததல்ல என்று நிரூபி.

(α= சாய்தளத்தின் சாய்வு கோணமாகும்)

வீச்சுத் திசைவேகம் 'U' என்றும், வீச்சுத் திசை சாய்தளத்துடன் உண்டாக்கும் கோணம் 'θ' எனவும் எடுத்துக்கொள்க.

$$\therefore\ 0 = U \sin \theta . t - \tfrac{1}{2} g \cos \alpha . t^2$$

$$\therefore\ t = \frac{2U \sin \theta}{g \cos \alpha} \qquad ......(1)$$

இந்நேரத்தில் சாய்தளத்தின்மேல் வீச்செல்லை

$$R = U \cos \theta . t - \tfrac{1}{2} g \sin \alpha . t^2 \qquad ......(2)$$

(1)-லிருந்து $U \sin \theta . t = \frac{1}{2} g \cos \alpha . t^2$

(2)-லிருந்து $U \cos \theta . t = R + \frac{1}{2} g \sin \alpha . t^2$

$$\therefore\ U^2 t^2 = \frac{g^2 t^4}{4} + R^2 + gR \sin \alpha .\ t^2$$

$$\therefore\ g^2 t^4 + 4\ t^2\ (gR \sin \alpha - U^2) + 4R^2 = 0$$

இது 't^2'ல் ஒரு இருபடி சமன்பாடாகும். எனவே இதன் மூலங்கள் t_1^2, t_2^2 என்றால்

$$t_1^2 + t_2^2 = \frac{4}{g^2}(U^2 - gR \sin \alpha)$$

$$t_1^2 . t_2^2 = \frac{4}{g^2} R^2$$

$$\therefore\ t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \sin \alpha = \frac{4U^2}{g^2} - \frac{4R \sin \alpha}{g} + \frac{4R \sin \alpha}{g}$$

$$= \frac{4U^2}{g^2}$$

= 'α'ஐச் சார்ந்ததல்ல.

28. கிடைதிசையுடன் 'β' கோணத்தை உண்டாக்கும் சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து 'α' வீச்சுக் கோணத்துடன் ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. அது சாய்தளத்தைத் செங்குத்துத் திசையில் தாக்க வேண்டுமானால், (1) $\cot \beta = 2 \tan (\alpha - \beta)$ (2) $\cot \beta = \tan \alpha - 2 \tan \beta$ என்றும் இருக்க வேண்டும்.

U-ஐ வீச்சுத் திசைவேகமாகக்கொள்க. சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகத்தின் கூறு $U \sin(\alpha-\beta)$ என்றும் 'g'-ன் கூறு $g \cos\beta$ என்றும் ஆகும்.

't' நேரத்தில் துகள் மீண்டும் சாய்தளத்தை அடைந்தால்

$$0 = U \sin(\alpha-\beta)\, t - \tfrac{1}{2} g \cos\beta . t^2$$

$$\therefore\ t = \frac{2U \sin(\alpha-\beta)}{g \cos\beta} \qquad ...(1)$$

சாய்தளத்தை மீண்டும் அடையும்போது துகளின் திசைவேகம் சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்க வேண்டுமானால், அப்போது சாய்தளத்தின் திசையில் திசைவேகத்தின் கூறு $=0$

$$0 = U \cos(\alpha-\beta) - g \sin\beta . t$$

$$\therefore\ t = \frac{U \cos(\alpha-\beta)}{g \sin\beta}$$

$$\therefore\ \frac{2U \sin(\alpha-\beta)}{g \cos\beta} = \frac{U \cos(\alpha-\beta)}{g \sin\beta}$$

$$\therefore\ 2 \tan(\alpha-\beta) = \cot\beta \text{ ஆகும்.}$$

$$\cot\beta = \frac{2[\tan\alpha - \tan\beta]}{1+\tan\alpha \tan\beta}$$

$$\therefore\ \cot\beta + \tan\alpha = 2\tan\alpha - 2\tan\beta$$

$$\therefore\ \cot\beta = \tan\alpha - 2\tan\beta \text{ ஆகும்}$$

குறிப்பு: துகள் சாய்தளத்தை கிடைதிசையில் தாக்க வேண்டுமானால் $\tan\alpha = 2\tan\beta$ என்று இருக்கவேண்டும்.

எனவே நிலைதிசை வேகம் $= 0$

$$0 = U \sin\alpha - gt$$

$$\therefore\ t = \frac{U \sin\alpha}{g} \qquad ......(2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து, tஐ நீக்கினால்

$$\frac{2U \sin(\alpha-\beta)}{g \cos\beta} = \frac{U \sin\alpha}{g}$$

$$2 \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta$$

$$2[\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta] = \sin\alpha \cos\beta$$

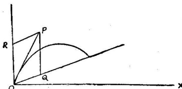
$$\sin\alpha \cos\beta = 2 \cos\alpha \sin\beta$$

$$\tan\alpha = 2\tan\beta \text{ என்றாகும்.}$$

29. நிலைதிசையிலும், சாய்தளத்தின் உச்ச சாய்வு நேர்கோட்டின் திசையிலும், ஆரம்பத் திசைவேகத்தின் கூறுகள் முறையே ' U ', ' V ' என்றால், சாய்தளத்தின் வீச்செல்லை $\frac{2UV}{g}$ என்று நிரூபி.

ஆரம்பத் திசைவேகம் ' W ' என்றும், திசைக் கோணம் ' α ' என்றும் சாய்தளத்தின் சாய்கோணம் ' β ' என்றும் கொண்டால்

$$\text{வீச்செல்லை} = \frac{2\, W^2 \cos \alpha \, \sin (\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta} \text{ ஆகும்.}$$



படம் 67.

$\angle XOP = \alpha$ என்றால், $OP = W$ என்று P என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. OR-க்கு இணையாக PQ என்ற நேர்கோட்டையும் OQ-க்கு இணையாக PR என்ற நேர்கோட்டையும் வரைக.

அப்போது $OR = U$, $OQ = V$ என்றாகும்.

OQP என்ற முக்கோணத்திலிருந்து

$$\frac{OQ}{\sin \angle OPQ} = \frac{PQ}{\sin \angle QOP} = \frac{OP}{\sin \angle OQP}$$

$$\frac{V}{\sin (90 - \alpha)} = \frac{U}{\sin (\alpha - \beta)} = \frac{W}{\sin (90 - \beta)}$$

$$\therefore \quad V = \frac{W \,.\, \cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$U = \frac{W \sin (\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

$$\therefore \quad \frac{2UV}{g} = \frac{2\, W^2 \cos \alpha \,.\, \sin (\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta}$$

$$= \text{வீச்செல்லை.}$$

30. வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து 'd' அடிகள் தூரத்தில் 'h' அடிகள் உயரத்திலுள்ள சுவருக்குப் பின்னே ஒளிந்திருக்கும் ஒரு சிறுவனை நோக்கி V அடிகள்/விநாடி என்ற அளவில் மிக அதிகத் திசைவேகத் துடன் கற்கள் எறியப்படுகின்றன. சுவருக்குப் பின்னே பாதுகாப்பு மண்டலத்தின் அகலத்தை கண்டுபிடி.

ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U' என்றும், 'α' ஆரம்பத் திசைக்கோண மென்றும் கொள்ளவும். இந்தக் கோணத்தில் எறியப்படும் கற்கள் சுவர் மேலேயுள்ள புள்ளியைத் தொட்டுக்கொண்டு செல்லும். இந்தப் புள்ளி யின் அச்சு தூரங்கள் (d, h) ஆகும். (d, h) என்ற புள்ளி

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \quad ...(1)$$ என்ற வீச்சுப் பாதை யின் மேலிருக்கும்.

$$h = dt - \frac{gd^2 [1+t^2]}{2U^2} \quad (2) \quad [t = \tan\alpha]$$ கிடை வீச்செல்லை

$$R = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$= \frac{2U^2 t}{g(1+t^2)} \quad ...(3)$$

சமன்பாடு (2)-லிருந்து

$$td - h = \frac{gd^2}{2U^2}(1+t^2)$$

$$\frac{2U^2}{g(1+t^2)} = \frac{d^2}{dt-h}$$

எனவே சமன்பாடு (3)

$$R = \frac{d^2 t}{dt-h}$$

கல் சுவருக்குப் பின்னே விழும் தூரம் சுவரிலிருந்து 'p' என்றால்

$$p = R - d$$

$$= \frac{d^2 t}{dt-h} - d \qquad = \frac{dh}{dt-h}$$

$$\therefore \quad p = \frac{dh}{d \tan \alpha - h}$$

p குறையக்குறைய $\tan \alpha$ அல்லது α அதிகமாகும். '$\tan \alpha$' மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க,

சமன்பாடு (2)-லிருந்து

$$gd^2t^2 - 2U^2dt + (gd^2 + 2U^2h) = 0$$

$$\therefore \quad t = \frac{U^2d \pm \sqrt{U^4d^2 - gd^2(2U^2h + gd^2)}}{gd^2}$$

$$= \frac{U^2 \pm \sqrt{U^4 - g(2U^2h + gd^2)}}{gd}$$

இதிலுள்ள இரண்டு மதிப்புகளின் அதிகமான மதிப்பை எடுத்துக் கொள்ளுவோம்.

$$\tan \alpha = t = \frac{U^2 + \sqrt{U^4 - g(2U^2h + gd^2)}}{gd}$$

$$p = \frac{hd}{\dfrac{U^2 + \sqrt{U^4 - g(2U^2h + gd^2)}}{g}} - h$$

$$= \frac{dhg}{U^2 - gh + \sqrt{U^4 - g(2U^2h + gd^2)}}$$

p குறையக்குறைய U அதிகமாக வேண்டும்

அதிகப்பட்ச திசைவேகத்தை எடுத்துக்கொண்டால்

$U = V$ ஆகும்

எனவே பாதுகாப்பு மண்டலத்தின் அகலம்

$$= \frac{dhg}{V^2 - gh + \sqrt{V^4 - g(2V^2h + gd^2)}}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. விநாடிக்கு 600 அடிகள் வேகத்தில் ஒரு குண்டு துப்பாக்கியி லிருந்து வெளிப்படுகிறது. எவ்வளவு அதிகத் தூரத்துக்குக் குண்டு செலுத்தப்பட முடியுமென்று கண்டுபிடிக்க. மேலும் குண்டு எவ்வளவு உயரத்துக்குச் செல்லுமென்றும் கண்டுபிடிக்க.

2. எறிபொருளின் மிக அதிக உயரம், வீச்சுப் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்திற்கு மேலே 'h' அடிகள் என்றால், அதன் உயரம் '$h \sin^2 \alpha$' என்று இருக்கும் நேரங்களுக்கிடையே யுள்ள இடைநேரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

['α' என்பது ஏதாவதொரு கோணத்தைக் குறிக்கட்டும்]

3. வீச்சுப்பாதையிலுள்ள செவ்வகலத்தின் முனைகளை வீச்சுப் பொருள் அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

4. 30° சாய்வுகோணத்தில், விநாடிக்கு 96 அடிகள் திசைவேகத்தில் ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது.

(1) எறிபொருள் அடையும் உச்ச உயரம், (2) பறக்கும் நேரம், (3) கிடைவீச்செல்லை இவைகளைக் கண்டுபிடிக்க.

5. ஒரு மனிதனால் ஒரு கல்லை 200 அடிகள் தூரம் எறியமுடியும். அவன் இதனை அடையவேண்டிய ஆரம்பத் திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

6. 32 கெஜ தூரத்தில், 12 கெஜ உயரமுள்ள ஒரு சுவரின்மேல் பாகத்தைக் கிடைதிசையில் தாண்டும் எறிபொருளின் ஆரம்பத் திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

7. 80 கெஜ தூரத்தில், 36 அடி உயரமுள்ள ஒரு சுவரை, கிடைதிசையுடன் $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ கோணத்தை உண்டாக்கி விநாடிக்கு 100 அடிகளையுடைய திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் துகள், தாண்டிச்செல்லுமெனக் காண்பி.

8. கிடைதிசையுடன் 25° கோணத்தை உண்டாக்கும் திசையில் குண்டு, விநாடிக்கு 2000 அடிகள் திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படுகிறது. அது அடையும் மிக அதிக உயரத்தையும், வீச்செல்லையையும் கண்டுபிடிக்க.

9. 16 அடிகள் உயரமுள்ள கிடை உருளைக்குள்ளே விநாடிக்கு 200 அடிகள் திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் ஒரு துகள் அடையும் உச்ச உயரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

10. கிடைவீச்செல்லை உச்ச உயரத்தைப்போல் மூன்று பங்கு இருக்குமாறு ஒரு பொருள் எறியப்படுகிறது. எந்தத் திசையில் பொருள் எறியப்படவேண்டுமென்று கண்டுபிடிக்க.

11. 13 அடிகள் தூரத்தில், 10 அடிகள் உயரமுள்ள சுவரின் மேல் பாகத்தை தொட்டுக்கொண்டு, அதன்பின் 7 அடிகள் தூரத்தில் கிடை சமதளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியைச் சென்று அடையும் எறிபொருளின் ஆரம்பக் குறைந்தபட்ச திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

12. 'U', 'V' என்பவைகளை இடை, நிலைகூறுகளாகக் கொண்ட திசைவேகத்துடன் ஒரு குண்டு 'O'-லிருந்து வெடிக்கப்படுகிறது. t விநாடிகள் நேரம் கழித்து குண்டு செல்லும் திசையைக் கண்டுபிடிக்க. $U = 96$ அடிகள்/விநாடி, $V = 288$ அடிகள்/விநாடி என்றால், குண்டின் பாதையிலுள்ள இரு புள்ளிகளில், குண்டு செல்லும் திசை, அப்போது குண்டையும் 'O'-வையும் சேர்க்கும் நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகுமென்று நிரூபி.

13. 'V' திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் ஒரு எறிபொருள், வீச்சுப் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்திலுள்ள

'A' என்ற புள்ளியைச் சென்றடைய முடியும். அதே வீச்சுக்கோணத்துடன் செலுத்தப்படும் மற்றோர் எறிபொருள் 'A'-க்கு மேல் 'h' அடிகள் உயரத்திலுள்ள 'B' என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லுமென்றால், வீச்சுத் திசைவேகம் $\frac{V^2}{(V^2-gh)^{\frac{1}{2}}}$ என்றளவுக்கு அதிகரிக்க வேண்டுமென்று காண்பி.

14. கிடை, நிலைதிசைவேகக் கூறுகள் முறையே 324 அடிகள்/விநாடி, 216 அடிகள்/விநாடி என்று இருக்குமாறு ஒரு துகள் செலுத்தப்படுகிறது. துகள் அடையும் உச்ச உயரத்தையும், பறக்கும் நேரத்தையும் கண்டுபிடிக்க.

15. 450 அடிகள் கிடை வீச்செல்லையையும் 5 விநாடிகள் பறக்கும் நேரமும் கொண்ட எறிபொருளின் ஆரம்பத் திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

16. 100 அடி தூரத்தில், 50 அடி உயரமுள்ள ஒரு சுவருக்குச் சற்று மேலாகச்செல்லும் ஓர் எறிபொருளின் ஆரம்பத் திசைவேகத்தையும், அதன் திசையையும் கண்டுபிடிக்க.

17. ஓர் எறிபொருள் அடையும் உச்ச உயரம் 64 அடிகள். அப்போது அதன் திசைவேகம் 96 அடிகள்/விநாடி ஆகும். வீச்சுக் கோணத்தையும் வீச்செல்லையையும் கண்டுபிடிக்க.

18. கிடைதிசைக்கு 45° கோணத்தில் எறியப்படும் ஒரு பந்து 360 அடிகள் கிடைதூரம் செல்லுகிறது. அது எவ்வளவு நேரம் ஆகாயத்திலிருந்தது?

19. ஆரம்பத் திசைவேகம் 'V' என்றும், வீச்சுக்கோணம் 'α' என்றும் உள்ள ஓர் எறிபொருள் அடையும் உச்ச உயரம், திசைவேகம் 'kV' என்று அதிகரித்து வீச்சுக்கோணம் 'λ'ஆல் குறைக்கப்படும் போது மாறாதெனக் காண்பி.

[இங்கு $\operatorname{cosec} \lambda = k (\cot \lambda - \cot \alpha)$ என்று கொள்க]

20. 'V' என்பதை ஆரம்பத் திசைவேகமாகவும் 'α' வீச்சுக் கோணமாகவும் உடைய ஓர் எறிபொருள் அடையும் உச்ச உயரம் 'h'-ஆகவும் கிடை வீச்செல்லை 'R'-ஆகவும் இருந்தால்

$$\frac{V^2}{2g} = h + \frac{R^2}{16h} \text{ என்றும்,}$$

$$\tan \alpha = \frac{4h}{R}$$

என்றும் நிரூபி.

21. x அடிகள் வீச்செல்லையை எட்ட ஓர் எறிபொருள் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் 't' விநாடிகளென்றால், ஆரம்ப வீச்சுக்கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)$ என்று காண்பி. மேலும் எறிபொருள் அடையும் உச்ச உயரத்தையும், ஆரம்பத் திசைவேகத்தையும் கண்டுபிடிக்க.

22. 'α' வீச்சுக்கோணம், R = கிடை வீச்செல்லை, T = பறக்கும் நேரம் என்றால்

$$gT^2 = 2R\tan\alpha \text{ என்று காண்பி.}$$

$\alpha = 60°$ என்றால், எறிபொருள் $\frac{3R}{4}$ கிடைதூரம் சென்றிருக்கும்போது அதன் உயரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

23. 1200 அடிகள் உயரத்திலுள்ள கிடை நேர்கோட்டில் ஒரு சண்டை விமானம் மணிக்கு 72 மைல்கள் என்ற வேகத்தில் செல்கிறது. பூமியிலுள்ள ஒரு பொருளைத் தாக்கவேண்டுமானால் அதற்கு நேர்மேலே 1200 அடிகளிலுள்ள இடத்தை அடைய எவ்வளவு தூரம் இருக்கும் போது, வெடிகுண்டு கீழே தள்ளப்படவேண்டும்?

24. P என்ற புள்ளியின் வழியாக விநாடிக்கு 32 அடிகள் திசை வேகத்துடன் செலுத்தப்படும் துகளின் வீச்சுக்கோணம் 30° ஆகும். PQ என்பது கிடைவீச்செல்லை. 'α', 'β' என்பவை முறையே P, Q என்ற புள்ளிகளில், ஏற்ற வீச்சுக் கோணங்களாகும்.

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ என்று காண்பி.}$$

25. ஓர் எறிபொருள், அது எறியப்பட்டு 't' விநாடிகள் கழித்து P என்ற புள்ளியை அடைகிறது. மீண்டும் t' நேரம் கழித்து, வீச்சுப்புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடைதளத்திலுள்ள புள்ளியைச் சென்றடைகிறது. கிடைதளத்திற்கு மேலே P-ன் உயரம் $\frac{gtt'}{2}$ என்று நிரூபி.

26. 30′ தூரத்தில் 20′ உயரமுள்ள ஒரு மரத்தைத் தாண்டிக் கொண்டு செல்லும் ஓர் எறிபொருள் மரத்துக்குப் பின்னே 5′ தூரத் தில் சமதளத்திலுள்ள புள்ளியைச் சென்றடைகிறது. எறிபொருளின் ஆரம்ப திசைவேகத்தையும் வீச்சுக் கோணத்தையும் கண்டுபிடிக்க.

27. 3° ஏற்றக் கோணத்தில் விநாடிக்கு 1000 அடிகள் திசைவேகத் துடன் செலுத்தப்படும் குண்டு அடையும் கிடைவீச்செல்லையைக் கெஜ சுத்தமாகக் கண்டுபிடி.

28. 100 கெஜ தூரத்தைக் கிடைவீச்செல்லையாக அடையவேண்டிய மிகக் குறைந்த ஆரம்ப வீச்சுத் திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடி. பறக்கும் நேரத்தையும் கண்டுபிடி.

29. ஒரு துப்பாக்கியின் உச்ச வீச்செல்லை 16 அடிகள். ஆரம்பத் திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடி. துப்பாக்கியிலிருந்து புறப்படும் குண்டு 4 அடிகள் கிடைதூரம் செல்லும்போது எவ்வளவு உயரத்தில் இருக்கு மெனக் கண்டுபிடி.

30. கொடுக்கப்பட்ட வீச்சுத் திசைவேகத்துக்கு, 'R' என்பது உச்சக் கிடை வீச்செல்லையென்றால், வீச்செல்லையிலிருந்து $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{4}$ என் பவைகளை முறையே கிடை, நிலை தூரங்களாகவுடைய புள்ளியின் வழி யாக எறிபொருள் செல்லுமெனக் காண்பி. ஆனால் இதற்கு வீச்சுக் கோணத்தின் இருக்கை [tangent] 1 ஆகவோ அல்லது 3 ஆகவோதான் இருக்கவேண்டுமெனவும் நிரூபி.

31. கிடை சமதளத்திலிருந்து 200 அடிகள் உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து விநாடிக்கு 2000 அடிகள் திசைவேகத்துடன் கிடை திசையில் ஓர் எறிபொருள் செலுத்தப்படுகிறது. அது கிடைதளத்தை யடையும்போது வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திலிருக்கு மெனக் கண்டுபிடி.

32. 400 அடிகள் உயரத்திலுள்ள ஒரு மலையுச்சியிலிருந்து 30° ஏற்றக் கோணத்தில் 768 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்துடன் செலுத் தப்படும் குண்டு தரையை அடையும்போது அது மலையடியிலிருந்து $3200\sqrt{3}$ கெஜ தூரத்திலிருக்குமெனக் காண்பி.

33. தரையிலிருந்து 3′ உயரத்திலிருந்து எறியப்படும் பந்து 35′ தூரத்திலுள்ள 15′ உயரச் சுவரைச் சற்றே தாண்டிச் செல்லும். $24\frac{1}{2}$′ உயரத்திலிருந்து பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் விழும்போது, துகள் அடையும் திசைவேகத்தைவிட, பந்தின் ஆரம்பத் திசைவேகம் குறையக்கூடாதென நிரூபி. அப்படிப்பட்ட திசைவேகத்துடன் செலுத் தப்படும் பந்து தரையை யடையும்போது சுவருக்கு எவ்வளவு பின்னே இருக்குமெனக் கண்டுபிடி.

34. பூமிக்கு 4 அடி 3 அங்குலங்கள் உயரத்திலிருந்து 40 அடி கள்/விநாடி திசை வேகத்துடன் செலுத்தப்படும் ஓர் எறிபொருள் 20′ தூரத்திலுள்ள 16 அடி 3 அங்குலங்கள் உயரமுள்ள சுவருக்கு சற்று மேலே சென்று பூமியை அடைய எவ்வளவு நேரமாகும்?

35. எறிபொருளின் கிடைவீச்செல்லை R, பறக்கும் நேரம் T இவை கள் $gT^2=2R\tan\alpha$ என்ற சமன்பாட்டைச் சரிசெய்யுமென நிரூபி.

உச்சக் கிடைவீச்செல்லை 100 மைல்கள் என்றும், பறக்கும் நேரம் 3 நிமிடங்கள் என்றும் கொண்டால் (1) வீச்சுக் கோணம், (2) ஆரம்பத் திசைவேகம், (3) வீச்சுப் பாதையின் உயரம் இவைகளைக் கண்டுபிடி.

36. 50 கெஜ தூரத்தில் 75 அடிகள் உயரத்திலுள்ள சுவரைக் கிடைதிசையில் தாண்டிச் செல்லும் எறிபொருளின் திசைவேகத்தையும் அதன் திசையையும் கண்டுபிடி.

37. 100 அடிகள் உயரத்திலுள்ள ஒரு கோபுரத்திலிருந்து கிடைதிசையில் செலுத்தப்படும் எறிபொருளின் வீச்சுப் பாதையின் குவியம் கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து வரையப்படும் கிடை சமதளத்தில் அமையுமென்றால், எறிபொருளின் வீச்சுத் திசைவேகம் விநாடிக்கு 80 அடிகள் என்று நிரூபி.

38. 9 அடிகள் உயரத்திலிருந்து கிடைதிசையில் செலுத்தப்படும் எறிபொருள் 1000 அடிகள் தள்ளிப் பூமியை அடைகிறது என்றால், ஆரம்பத் திசைவேகம் $1333\frac{1}{3}$ அடிகள்/விநாடி என்று காண்பி.

39. கிடைவீச்செல்லை, வீச்சுப் பாதையின் உயரத்திற்குச் சமமாக இருக்க வேண்டுமானால், எறிபொருளின் வீச்சுக் கோணம் 15° அல்லது 75° ஆக இருக்கவேண்டுமென நிரூபி.

40. $2\sqrt{ag}$ திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் எறிபொருள் 'a' சம உயரமுள்ள இரண்டு சுவர்களுக்குச் சற்றே மேலே சென்றால் எறிபொருள் பாதையின் குவியம் '$2a$' என்றும் சுவர்களுக்கிடையே பறக்கும் நேரம் $2\sqrt{\frac{a}{g}}$ என்றும் நிரூபி. [சுவர்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $2a$ என்று கொள்க.]

41. வீச்சுப் பாதையிலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியின் திசைவேகம் 'U' என்றும், வீச்சுக் கோணம் 'θ' என்றும் கொண்டால், $\frac{U}{g \sin \theta}$ நேரம் கழித்து இந்தத் திசைக்குச் செங்குத்தாக எறிபொருள் பறக்குமெனக் காண்பி.

42. தரையிலிருந்து செலுத்தப்படும் எறிபொருள், வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து 'a' தூரத்தில் 'h' உயரமுள்ள சுவருக்குச் சற்று மேலே செல்லும் வீச்சுப் பாதை, சுவருக்குச் செங்குத்தான தளத்தில் அமைந்தால், கிடைவீச்செல்லை R என்பது $\tan \alpha = \frac{Rh}{R-h}$ என்ற சமன்பாட்டிற்குக் கட்டுப்பட்டிருக்குமென நிரூபி. (α = ஆரம்ப வீச்சுக் கோணமெனக் கொள்க.)

43. 'h' என்பது உச்ச வீச்சு உயரமென்றும் அப்போது கிடைவீச் செல்லே 'R' என்றும், கொடுக்கக்கூடிய ஆரம்பத் திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் எறிபொருள் அடையும் உச்ச வீச்செல்லே, $\frac{16h^2+R^2}{8h}$ என்று காண்பி.

44. கிடைதிசைக்கு 'α' கோணத்துடன் 'V' திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் பந்து 'P' புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்ட 't' விநாடிகள் கழித்து Q என்ற புள்ளியை அடைகிறது. P-லிருந்து Q-ன் கிடை, நிலைதூரங்களைக் கண்டுபிடி. PQ, கிடை திசையுடன் 'θ' கோணத்தை உண்டாக்கினுல் பந்து Q-ல் இருக்கும்போது அதன் வீச்சுக்கோணம் கிடைதிசையுடன் $\tan^{-1}[2\tan\theta-\tan\alpha]$ என்ற கோணத்தை உண்டாக்குமென நிரூபி.

45. வீச்சுப் பாதையிலுள்ள P, Q என்ற புள்ளிகளில் வீச்சுக் கோணம் முறையே 'α', 'β' ஆகும். PQ என்ற நேர்கோடு கிடை திசையுடன் 'γ' கோணமுண்டாக்கினுல், $\tan\gamma=\frac{1}{2}(\tan\alpha+\tan\beta)$ எனக் காண்பி.

46. எறிபொருள் ஆரம்ப வீச்சுத்திசைக்குச் செங்குத்தாகச் செல் லும் போது, அது வீச்சுப்புள்ளியிலிருந்து $\frac{U^2}{2g\sin^2\alpha}$ தூரத்திலுள்ள தென நிரூபி. அப்போது திசைவேகம் $U\cot\alpha$ எனவும் நிரூபி. (U, α என்பவை ஆரம்பத் திசைவேகம், ஆரம்ப வீச்சுக்கோணம் எனக் கொள்க.)

47. 10,000 அடிகள் தூரத்திலுள்ள 100 அடி உயரமுள்ள கட்டடத் தின் உச்சியைத் தாக்க 1200 அடிகள்/விநாடி. திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் குண்டு எந்தத் திசையில் வெடிக்கப்பட வேண்டுமெனக் கண்டுபிடி.

48. 'h' உயரமுள்ள ஒரு குன்றின் ஏற்றக்கோணம் 'β' ஆகும். குன்றின் உச்சியைத் தாக்கவேண்டுமானுல், ஆரம்பத் திசைவேகம் $gh\sqrt{1+\text{cosec}\,\beta}$-க்குக் குறையக் கூடாதென நிரூபி.

49. 120' தூரத்தில் 50' உயரமுள்ள ஒரு சுவருக்குச் சற்றே மேலே செல்லும் எறிபொருளின் குறைந்த ஆரம்பத் திசைவேகம், துகள் 90 அடியிலிருந்து விழும்போது ஏற்படும் திசைவேகத்துக்குச் சமமென நிரூபி. ஆரம்ப வீச்சுத்திசையையும் கண்டுபிடி.

50. வீச்சுப் பாதையிலுள்ள இருபுள்ளிகளின் வீச்சுக்கோணங்கள் α, β என்ருல் அந்த இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையே எறிபொருள் பறக்கும்

நேரம் $\frac{V}{g}[\tan\alpha - \tan\beta]$ என நிறுவி. [V ஆரம்பத் திசைவேகத்தின் கிடைக் கூறு எனக் கொள்க.]

51. 30° ஏற்றக் கோணத்திலுள்ள சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து 60° வீச்சுக்கோணத்தில் 300 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் இயங்குகிறது. சாய்தளத்தின் மேல் வீச்செல்லையையும், பறக்கும் நேரத்தையும் கண்டுபிடி.

52. கொடுக்கப்பட்ட ஆரம்பத் திசைவேகத்துடன் கிடை சமதளத்தில் உச்ச வீச்செல்லை 3000 மீட்டர்கள். 30° ஏற்றக்கோணமுள்ள சாய்தளத்தின்மேல் உச்ச வீச்செல்லையைக் கண்டுபிடி.

53. 30° ஏற்றக்கோணமுள்ள சாய்தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியை, 'U' திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் ஓர் எறிபொருள், செங்குத்துத் திசையில் தாக்குகிறது. சாய்தளத்தின்மேல் வீச்செல்லை $\frac{4U^2}{7g}$ எனக் காண்பி.

54. ஒரு குன்று கிடைதிசைக்கு 30° கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கிறது. குன்றின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து, ஓர் எறிபொருள் மேலே எறியப்படுகிறது. மற்றொன்று கீழ்நோக்கி எறியப்படுகிறது. இரண்டு வீச்சுகளின் போதும் ஆரம்ப வீச்சுக்கோணம் 45° ஆகும். ஓர் எறிபொருளின் வீச்செல்லை மற்றதின் வீச்செல்லையைப் போல் ஏறக்குறைய $3\frac{3}{4}$ பங்கென நிறுவி.

55. கொடுக்கப்பட்ட சாய்தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே திசைவேகத்துடன் எறியப்படும் இரு துகள்களின் வீச்சுக் கோணங்களிடையேயுள்ள கோணம் $\frac{\pi}{2}$ என்றால், அந்த இரண்டு எறிபொருள்கள் உண்டாக்கும் வீச்செல்லைகளிடையேயுள்ள தூரம் ஒரு மாறிலி யெனக் காண்பி.

56. வீச்சுப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சாய்தளத்தின்மேல் எறிபொருள் உண்டாக்கும் உச்ச வீச்செல்லை, அந்த நேரத்தில் ஒரு பொருள் தடையின்றி விழும் தூரத்துக்குச் சமமென நிறுவி.

57. வீச்சுப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் தளம் 'β' கோணத்தில் கிடை சமதளத்துடன் சாய்ந்திருக்கிறது. வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து 'U' திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் துகள் சாய்தளத்தைச் செங்குத்தாகச் சந்திக்கிறது.

(1) சந்திக்கும் புள்ளி வீச்சுப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் கிடை சமதளத்திலிருந்து $\dfrac{2U^2 \sin^2 \beta}{g\,(1+3\sin^2 \beta)}$ உயரத்திலிருக்கும்.

(2) இதற்கான நேரம் $\dfrac{2U}{g\sqrt{1+3\sin^2 \beta}}$

(3) சாய்தளத்தின் வீச்செல்லை $= \dfrac{2U^2 \sin \beta}{g\,(1+3\sin^2 \beta)}$ எனக் காட்டுக.

58. ஒரேநிலை சமதளத்தில், சம திசைவேகத்துடன், ஒரே புள்ளியிலிருந்து செலுத்தப்படும் பல துகள்களின் பரவளைவுப் பாதைகளின் குவியங்கள் ஒரு வட்டத்தின் மேல் அமையுமென நிரூபி.

59. ஒரேநிலை சமதளத்தில், சம திசைவேகத்துடன், ஒரே புள்ளியிலிருந்து செலுத்தப்படும் துகள்கள் எந்த ஒரு நேரத்திலும் ஒரு வட்டத்தின்மேல் அமையுமெனக் காண்பி. ஒன்றிலிருந்து பார்க்கும்போது மற்றத் துகளின் திசை மாறுமலிருக்கிறதெனவும் காண்பி.

60. ஒரேநிலை சமதளத்தில், 'V' திசைவேகத்துடன், இரு துகள்கள் 'θ_1' 'θ_2' வீச்சுக் கோணங்களுடன் செலுத்தப்படுகின்றன. $\dfrac{V}{g}\cot\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$ நேரம் கழித்து அந்தத் துகள்களின் திசைவேகங்கள் இணையாக விருக்குமென நிரூபி. அவைகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு எந்நேரத்திலும், நிலைதிசையுடன் $\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$ என்ற கோணத்தை உண்டாக்குமெனக் காண்பி.

6. கணத்தாக்கு விசைகள்
(Impulsive forces)

6·1. விசையின் தாக்களவு : P எனும் ஒரு சீரானவிசை **(uniform force)** ஒரு பொருளின் மேல் 't' அலகு காலம் செயல்படின், **அதன் தாக்களவு** (Impulse) Pt ஆகும்.

(i) விசை திசைமாருது, அதன் அளவு, காலத்தின் சார்பலனுனல் 't' நேரத்தில் அதன் அளவு P ஆகுக. அந்நேரத்திலிருந்து 'δt' எனும் குறுகிய நுண்கால அளவில் அது சீரான விசை எனக் கொள்ளலாம். ஆகவே அதன் தாக்களவு $P.\delta t$ ஆகும். t_1 என்ற நேரத்திலிருந்து t_2 எனும் நேரம் வரையுள்ள, தாக்களவு $\int_{t_1}^{t_2} P\,dt$ எனும் நுண்தொகையாகும்.

(ii) விசையின் திசையும் அளவும், மாறக்கூடியதாக 't'-ன் சார்பலனுனல் t நேரத்தில் விசையை $\overline{P}$ எனும் வெக்டரால் குறிப்போம். அப்போது 't_1', என்ற நேரத்திலிருந்து t_2 எனும் நேரம் வரை, விசை தாக்களவு $\int_{t_1}^{t_2} \overline{P}\,dt$ எனும் நுண்தொகை ஆகும்.

[குறிப்பு : கடைசியில் கூறியதே தாக்களவின் மிகவும் பொதுவான வரையறை (General definition) ஆகும்.]

தேற்றம்

ஒரு பொருளின்மேல் ஒரு விசை, ஒரு கால அளவிற்குத் தொடர்ந்து செயல்பட அதில் ஏற்படும் உந்தமாறுதல், அதே காலத்தில் விசையின் தாக்களவிற்குச் சமமாகும்.

நிரூபணம்: பொருளின் திணிவு m. 't' என்ற நேரத்தில், விசையின் மதிப்பு $\overline{P}$. அந்நேரத்தில் அதன் வேகம் $\overline{v}$.

அப்போது நியூட்டனின் இயக்க விதிப்படி

$$\frac{d}{dt}(m\overrightarrow{v}) = \overline{P}$$

[உந்த மாறுதல் வீதம் = விசை என்பது விதி]

$$\therefore \int_{t_1\text{-ல்}\,\overline{v}}^{t_2\text{ல்}\,\overline{v}} d(m\overline{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}\, dt$$

t_1 நேரத்தில் வேகம் $\overline{v}_1$ ஆகவும் t_2 நேரத்தில் $\overline{v}_2$ ஆகவுமானால்

$$\int_{\overline{v}_1}^{\overline{v}_2} d(m\overline{v}) = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt$$

$$\therefore (m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1) = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt$$

$\therefore$ **உந்தமாறுதல் = விசையின் தாக்களவு**

[**குறிப்பு:** ஒரு சிலர், உந்தமாறுதலைத் தாக்களவின் விளக்கமாகக் கொண்டு, $\int_{t_1}^{t_2} \overline{P}\, dt$ என்பது விசையின் தாக்களவு எனும் முடிவிற்கு வருவதும் உண்டு.]

6·2. கணத்தாக்கு விசை: மிகப் பெரிய விசை மிகக் குறுகிய காலத்திற்கு ஒரு பொருளின்மேல் செயல்பட, அத்தகைய விசை கணத் தாக்கு விசை (Impulsive force) எனப்படும்.> கொள்கையளவில், விசை அலகிலா எனும்படி மிகப் பெரியதாகவும், செயல்படும் காலம் மிக மிக நுண்ணளவாகவும் ஆனால், தாக்களவு (அதாவது இரண்டின் பெருக் கற் பலன்) கணிசமாகவும் இருக்கவேண்டும். நடைமுறையில் இது சாத் தியமன்று. கணத்தாக்கு விசைக்கு ஏறக்குறைய எடுத்துக்காட்டாகச் சில கூறலாம். ஒரு பந்து சுவருடன் மோதுதல், சுத்தியால் ஓர் ஆணியை அடித்தல், கீழே விழுந்துகொண்டிருக்கும் பந்தை உதைத்தல், இரு கோலிகள் மோதல் முதலியனவாம். இங்கெல்லாம் திடீரென உந்த மாறுதல் ஏற்படுகின்றது. 10^7 அலகுள்ள விசை (அதாவது கோடி

அலகுகள்), $\frac{1}{10^7}$ வினாடி செயல்பட ஏற்படும் உந்தமாறுதல் $10^7 \times \frac{1}{10^7} = 1$ அலகாகும். 1 உடன் ஒப்புநோக்குமிடத்து 10^7 மிகப் பெரிய எண்ணும் $\frac{1}{10^7}$ மிகச் சிறிய எண்ணுமாகும். ஆனால், உந்தமாறுதல் அளவிடற்குரிய (finite) எண்ணாகும் என்பதைக் காண்கிறோம்.

6·3 கணத்தாக்கு விசையும் தொடர்ந்து செயல்படும் விசையும்: ஒரு பந்து மேலிருந்து, புவியீர்ப்புவிசை தொடர்ந்து செயல்படுவதால் கீழே விழுகிறது. நொடிக்கு நொடி அதன் நிலை மாறுகிறது. அதன் உந்தம் மாறுகிறது. இவ்வாறு தொடர்ந்து செயல்படும் விசையை, உந்தமாறுதல் வீதத்தால் கூறுகிறோம்.

கீழேவிழும் பந்தை ஒரு மட்டை தாக்கினால், ஒரு மிகப் பெரிய விசை ஒரு கணநேரத்திற்குப் பந்தைத் தாக்குகிறது. பந்தின் அந்த நிலையிலேயே திடீரென உந்தமாறுதல் ஏற்படுகிறது. ஆகவே கணத்தாக்கு விசை செயல்படும்போது **(i) பொருளின் நிலைமாறுவதில்லை (ii)** பொருளில் ஏற்படும் **உந்தமாறுதலால் கணத்தாக்கு விசையைக் கூறவேண்டி வருகிறது. (iii)** உந்தமாறுதல் ஏற்படும் காலம் Δt ஆகவும், அந்த நேரத்தில் தொடர்ந்து செயல்படும் விசை $\overline{F}$ ஆகவும் மானால், இதனால் ஏற்படும் உந்தமாறுதல் $\overline{F}.\Delta t$. இது Δt, மிகக்குறுகும்போது, கணத்தாக்கு விசையால் ஏற்படும் உந்தமாறுதலுடன் ஒப்புநோக்குமிடத்து, புறக்கணிக்கத்தக்க அளவுக்கு நுண்ணியதாகும். இதனால் நாம் தேறுவது,

(i) கணத்தாக்கு விசையைக் கணக்கில் எடுக்கும்போது அத்துடன் செயல்படும் மற்றத் தொடர்ந்து செயல்படும் விசைகளைப் புறக்கணிக்கலாம் என்பதாம்.

குறிப்பு 1: கணத்தாக்கு விசையின் அளவு J, அது தாக்குமுன் பொருளின் வேகம் $\overline{u}$; தாக்கின உடனே வேகம் $\overline{v}$, திண்மை m என்றால்

$\overline{J} = m\overline{v} - m\overline{u}$ என்பது

கணத்தாக்கு விசைக்குள்ள சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு 2: கணத்தாக்கு விசையில்லாத திசையில் உந்தமாறுதல் இல்லை. திணிவு நிலையானால் வேகமாறுதலும் இல்லை. உதாரணமாக ஒரு பந்தை ஒரு சுவரை நோக்கி எறிந்தால், சுவரை அடையும்வரை அதற்குள்ள வேகம் கிடைவேகம் (Horizontal velocity), நிலைவேகம் (Vertical velocity) என இரண்டின் கூடுதலாகும். சுவரை தாக்கும்போது கணத்தாக்கு விசையின்

திசை கிடையாதாதலால், நிலைவேகத்தில் மாறுதல் ஏதும் ஏற்படாது. சுவர் இல்லாவிடின், நிலைவேகத்தில் புவி ஈர்ப்புவிசையால் எவ்வாறு வேகமாறுதல் ஏற்படுமோ அதுமட்டுமே தாக்குமுன்னரும் பின்னரும் ஏற்படும்.

6.4 உந்தக் காப்புக்கொள்கை (**Conservation of Momentum**): ஒரு திசையில் கணத்தாக்கு விசை இல்லையாயின், உந்த மாறுதலும் ஏற்படாதெனக் கண்டோம். இரு பந்துகள் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதிக்கொள்ளும்போது, கணத்தாக்குவிசைகள் செயல் படுகின்றன. நியூட்டனின் மூன்றுவது இயக்கவிதிப்படி, இரு பந்து களின் மேலும் செயல்படும் கணத்தாக்குவிசைகள் அளவில் ஒன்றற் கொன்று சமம், ஆனல் திசையில் எதிர். அதனுல் ஒன்றில் ஏற்படும் உந்த மாறுதல், மற்றதில் ஏற்படும் உந்த மாறுதலுக்கு அளவில் சமம் ஆனல் திசையில் எதிர். ஆகவே, மொத்த உந்த மாறுதல் பூஜ்யம். தாக்குக்கு முன்னருள்ள உந்தமே பின்னரும் மாருது உள்ளது. **இரண்டு பொருள்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதிக்கொள்ளும்போது அவற்றின் மொத்த உந்த மாறுதல் மாருது.**

[குறிப்பு: இரண்டு பொருள்களுக்குக் கூறியது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட பொருள்களுக்கும் பொருந்தும். அவைகளின் உந்தங்களின் வெக்டர் கூடுதல் மாருது நிற்கும். பொருள்களை ஒரே தொகுதியாகக் கொள்ள, மோதலை உள்ளுறு (Internal) கணத்தாக்குவிசை எனக் கொள்ளலாம். பீரங்கியில் குண்டு வெடிக்கும்போதும், ஒரு குண்டு திடீரெனப் பல துண்டுகளாகச் சிதறும்போதும் உள்ள விசைகளை உள்ளுறு கணத்தாக்கு விசைகள் எனக் கொள்ளலாம். தொகுதியின் வெக்டர் உந்தமாறுதல் முன்னரும் பின்னரும் ஒன்றே.]

6.5. பீரங்கியும் குண்டும்: ஒரு பீரங்கியில் மருந்து அடைத்துக் குண்டும் உள்ளது. மருந்து திடீரென வெடிக்க, அதனுல் வெளியாகும் இரசாயன ஆற்றலின் ஒரு பாகம் ஒலியாகவும் வெப்ப ஆற்றலாகவும் மாறுகிறது. பெரும்பாகம், பொறியாற்றலாக (Mechanical energy) மாறி, குண்டிலும், பீரங்கியிலும் உந்த மாறுதல் ஏற்படுத்துகிறது. பீரங்கி, குண்டு இரண்டையும் ஒரே தொகுதியாகக் கொள்ள, மொத்த உந்த மாறுதல் முன்னரும் பின்னரும் ஒன்றே.

பீரங்கியின் திணிவு M

குண்டின் திணிவு m.

மருந்து வெடிப்பதற்குமுன் இரண்டின் வேகம் $= 0$

வெடித்தவுடன் பீரங்கியின் வேகம் $= \bar{U}$ ஆகுக.

குண்டின் வேகம் $= \bar{u}$ ஆகுக.

உந்தக்காப்புக் கொள்கையால்

$$M\bar{U}+m\bar{u} = 0$$

$$\therefore\ m\bar{u} = -M\bar{U}$$

ஆகவே குண்டு முன்னே பாய்ந்தால், பீரங்கி பின்னடைகிறது.

$|\bar{u}| = u$ எனவும் $|\bar{U}| = U$ எனவுமானுல்

$mu = MU$ (அளவில் சமம்.)

ஆற்றலும் வேகமும் : மருந்து வெடிப்பதால் ஏற்படும் பொறி யாற்றல் E ஆகுக. இந்த ஆற்றல் இயங்கு ஆற்றலாக (Kinetic Energy) மாறுகிறது.

$$\therefore\ E = \tfrac{1}{2}mu^2+\tfrac{1}{2}M\bar{U}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}[mu^2+M\bar{U}^2] = \tfrac{1}{2}\left[mu^2+\frac{m^2u^2}{M}\right]$$

$$\therefore\ E = \frac{m(m+M)u^2}{2M}$$

$$\therefore\ u^2 = \frac{2ME}{m(m+M)} = \frac{\dfrac{2E}{m}}{1+\dfrac{m}{M}}$$

M பெரிதாக ஆக u அதிகமாகிறது.

கணக்கு 1 : ஒரு வழவழப்பான தரைமீது ஒரு வண்டியில் கிடைகோட்டிற்கு $\alpha°$ சாய்வில் ஒரு பீரங்கி பொருத்தப்பட்டுள்ளது. பீரங்கி வெடிக்கும்போது அதிலிருந்து கிளம்பும் குண்டு கிடை கோட்டிற்கு $\theta°$ உயரத்தில் பாய்கிறது. பீரங்கியும் வண்டியும் சேர்ந்து குண்டைப்போல் n மடங்கு திணிவானுல்,

$$\tan\theta = \left(1+\frac{1}{n}\right)\tan\alpha$$

என நிறுவுக.

குண்டு கிளம்பும்போது, பீரங்கி வண்டியுடன் பின்னேக்கி நகரும். அவ்வாறு பீரங்கி பின்னேக்கிச் செல்லும் வேகம் u என்போம். பீரங்கியைச் சார்ந்து குண்டின் வேகம் v என்போம். இது பீரங்கியின் குழலின் திசையில், அதாவது கிடைதளத்திற்கு α உயரச் சாய்வில் உள்ளது. இதன் கிடைப்பிரிவு $v\cos\alpha$ (முன்னேக்கிய திசையில்). பீரங்கியின் வேகம் u (பின்னேக்கி)

$\therefore$ குண்டின் உண்மைக் கிடைவேகம் $= v\cos\alpha - u$

குண்டின் வேகத்தின் நிலைப் பிரிவு $= v\sin\alpha$

∴ குண்டின் வேகத்தின் உயரச் சாய்வு θ எனில்,

$$\tan\theta = \frac{\text{வேகத்தின் நிலைப்பிரிவு}}{\text{வேகத்தின் கிடைப்பிரிவு}}$$

$$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha - u} \qquad \ldots\ldots(1)$$

உந்தக் காப்புக் கொள்கைப்படி

$$nu = (v\cos\alpha - u)$$

$$(1+n)u = v\cos\alpha$$

$$\therefore\ v = (1+n)\frac{u}{\cos\alpha} \qquad \ldots\ldots(2)$$

சமன்பாடுகள் (1) & (2)-இல் இருந்து

$$\tan\theta = \frac{(1+n)\,u\tan\alpha}{(1+n)\,u - u}$$

$$= \frac{(1+n)\,u\tan\alpha}{nu}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\tan\alpha$$

6·6. நூலால் இணைக்கப்பட்ட இரு பொருள்கள் :

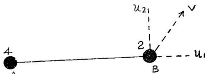


படம் 68.

A, B, எனும் இரு பொருள்கள், நீளம் மாற இயலாத ஒரு நூலால் இணைக்கப்பட்டு, நூல் இறுக்கமாக இருக்கும்படி அமையட்டும். B எனும் பொருளை ஒரு கணத்தாக்கு விசைதாக்கினல் (AB திசையிலோ, அல்லது குத்தாகவோ அல்லாமல்), B எவ்வாறு நகரும் எனக் கூற இயலாது. ஏனெனில் நூலிலும் இழுக்கணத்தாக்கு விசை தோன்றும். ஆனல் A, B இரண்டையும் ஒரு தொகுதியாகக் கொண்டால் அவ்விரண்டின் மொத்த உந்தமாறுதல் கணத்தாக்கு விசைக்கு அளவிலும் திசையிலும் சமமாகும் எனவும், தாக்கு விசைக்குக் குத்துத் திசையில் உந்தமாறுதல் ஏதும் இல்லை எனவும் அறிவோம். அன்றியும் B நகரும் திசையில் A-யும் உடன் நகரவேண்டும்.

கணக்குகள்

A, B இரு பொருள்களின் திணிவு முறையே 4 கிலோ; 2 கிலோ ஆகும். அவை ஓர் இழுபடமுடியா நூலால் இணைக்கப்பட்டு நூல் இறுக்கமான நிலையில் ஒரு வழவழப்பான சமதளத்தில் உள்ளன. AB கிழக்கு நோக்கியுள்ளது. B கட்டப்படாதிருந்தால் வடகிழக்காக 7 மீ. வேகத்துடன் நகரும்படி ஒரு விசை அதைத் தாக்குகிறது. B என்ன வேகத்துடன் நகரத் தொடங்குகிறது?



படம் 69.

தாக்கு விசையின் அளவு $= 7 \times 2 = 14$. அதன் திசை வடகிழக்குத் தாக்குதலுக்கு பின்னர், உடனே, கிழக்காக B-ன் வேகம் u_1, வடக்காக u_2 ஆகுக.

$\therefore$ A-ன் வேகமும் கிழக்காக u_1; (வடக்காக பூஜ்யம்)

கிழக்காக A, B இரண்டின் உந்தமாறுதல் $= 4u_1 + 2u_1 = 6u_1$

$$6u_1 = 14 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \; u_1 = \frac{7}{3\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{6}$$

வடக்காக மொத்த உந்தமாறுதல் $= 2u_2 = \frac{14}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \; u_2 = \frac{14}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ B-ன் வேகம் V ஆனால்

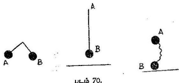
$$V^2 = u_1^2 + u_2^2 = \left(\frac{7\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 \; [\tfrac{1}{9} + 1]$$

$$V = \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{7\sqrt{20}}{6} = \frac{7\sqrt{5}}{3}$$

$$திசை = கி. \tan^{-1}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) வ.$$
$$= கி. \tan^{-1}\left(\frac{7\sqrt{2}}{2} \div \frac{7\sqrt{2}}{6}\right) வ.$$
$$= கி. \tan^{-1} 3 \text{ வ.} = கி. 71° 34' \text{ வ.}$$

கணக்கு: 'l' அலகு நீளமுள்ள ஒரு நூலால் இணைக்கப்பட்ட சம திணிவுள்ள இரு பொருள்கள், ஒரு சமதளத்தில் நெருங்கி உள்ளன. இவற்றுள் ஒன்றை $\sqrt{10gl}$ அலகு வேகத்துடன் நேர் மேலே எறிந்தால், அது மீண்டும் தளத்தில் $2\sqrt{gl}$ வேகத்துடன் விழும் எனக் காட்டு.



படம் 70.

[இங்குள்ள இயக்கங்களை ஆராயவேண்டும்.

(i) முதலில் A நேர் மேலே செல்கிறது. அதன் மேல் புவியீர்ப்பு விசை தொடர்ந்து செயல்படுகிறது.

(ii) B-லிருந்து A-ன் உயரம் l ஆகும்போது நூல் திடீரென இறுகுகிறது. அப்போது A, B இரண்டின் மேலும் கணத்தாக்கு இழுவிசை செயல்படுகிறது.

(iii) A-யும் B-யும் ஒன்றாக மேலே செல்ல அவை பேரில் புவியீர்ப்பு விசை செயல்படுகிறது.

(iv) அவை இறங்கும்போது, B சமதளத்தில் விழத் தளத்தின் கணத்தாக்கு விசை தாக்குகிறது.

(v) A மட்டும் கீழே விழுகிறது. நூல் தளர்வதால் புவியீர்ப்பு விசை மட்டும் செயல்படுகிறது. A-ன் மேல் கணத்தாக்கு விசை இல்லை.

இங்கு (i) (iii), (v)-ல் தொடர்ந்து செயல்படும் விசைகளும் (ii), (iv)-ல் கணத்தாக்கு விசைகளும் செயல்படுகின்றன. இவற்றை ஒவ்வொன்றாகக் கணக்கிடுவோம்.]

(i) $\sqrt{10gl}$ என்ற விசையுடன் A புறப்பட்டு, l உயரத்தில் வரும் போது அதன் வேகம் v ; " $v=u^2-2gx$ " என்ற சூத்திரத்தினால்

$$v^2 = 10gl - 2gl = 8gl$$

$$v = \sqrt{8gl}$$

(ii) கணத்தாக்கு விசை A, B இரண்டிலும் செயல்படுவதால் உந்தக் காப்புக் கொள்கைப்படி.

$\sqrt{8gl} = 2w$ [w என்பது A, B இரண்டின் பொது வேகம். இரண்டிற்கும் வேகம் ஒன்றே.]

$\therefore$ தாக்குதலுக்குப் பின்னர் A, B இரண்டின் வேகம் $w = \sqrt{2gl}$

(iii) A, B இரண்டின் முடுக்கமும் கீழ்நோக்கி g ஆனதால் AB-ன் தூரம் l மாறுதபடி மேல்சென்று மறுபடியும் புறப்பட்ட நிலைக்கே வருகிறது.

(சமதளத்திலிருந்து) புறப்படும் வேகம் = அதற்குத் திரும்பும் வேகம் ஆதலால் B தளத்தை அடையும்போது அதன் வேகம் = $\sqrt{2gl}$.

B-க்கு 'l' உயரத்தில் A வரும்போது அதன் வேகம் = $\sqrt{2gl}$.

(iv) B தளத்தில் திடீரெனத் தாக்குவதால் அதன் வேகம் மறைகிறது. நூல் தளர்ந்து விடுவதால் Aஐ இந்தத் தாக்குவிசை ஒன்றும் செய்வதில்லை.

(v) A இப்போது $\sqrt{2gl}$ வேகத்துடன் l உயரத்திலிருந்து புறப்பட்டுக் கீழே விழுகிறது.

$\therefore$ '$v^2 = u^2+2gx$' என்ற சூத்திரத்தால்

$$v^2 = 2gl+2gl \qquad \therefore \ v = 2\sqrt{gl}$$

$\therefore$ A தளத்தில் விழும் வேகம் = $2\sqrt{gl}$

கணக்கு : 17 பவுண்டு, 15 பவுண்டு திணிவுள்ள இரு துகள்கள் ஓர் இழுபடா நூலால் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. நூல் உராய்வில்லாத சிறு கப்பிவழிச் செல்ல, துகள்கள் கப்பிக்கு இருபுறமும் தொங்குகின்றன. அவை 16 செ.மீ./விநாடி வேகத்துடன் இயங்கும்போது, பெரிய துகள் நிறுத்தப்பட்டு உடனே விடப்படுகிறது. $\frac{1}{2}$ விநாடியில் தளர்ந்த நூல் இறுகுமென நிறுவுக. (M. U. April, 1965)

இறுகின உடனே அவை என்னென்ன வேகத்துடன் இயங்குகின்றன ?

செயல் முறை : நிறுத்தி விட்டவுடன், 17 பவு., 0 வேகத்திலிருந்து புறப்பட்டுக் கீழே விழுகிறது. 15 பவு., 16 அடி வேகத்தில் மேலே நகர்கின்றது.

மறுபடியும் நூல் இறுகும் நேரத்தில் 17 பவு., எத்தனை தூரம் கீழே விழுந்ததோ அத்தனை தூரம் 15 பவு. மேலே சென்றிருக்க வேண்டும்.

அந்தக் காலம் 't' வினாடி ஆகுக.

17 பவு. கீழே விழும் தூரம் $= 16t^2$ [$s = \frac{1}{2}gt^2$ எனும் சூத்திரம்]

15 பவு. மேலே போகும் தூரம் $= 16t - 16t^2$ [$s = ut - \frac{1}{2}gt^2$ எனும் சூத்திரம்]

$\therefore \quad 16t^2 = 16t - 16t^2$

$\therefore \quad 32t^2 = 16t$

$\therefore \quad 32t = 16$

$\therefore \quad t = \frac{1}{2}$

$\therefore$ இன்னும் $\frac{1}{2}$ வினாடியில் நூல் மறுபடியும் இறுகும்.

[குறிப்பு: $\frac{1}{2}$ வினாடியில் 17 பவு. விழும் தூரம் 1 அடி; 15 பவு. மேலே போகும் தூரம் $= 4 - 1 = 3$ அடி. நூல் 2 அடி தளர்ந்துள்ளது. ஆனால் $\frac{1}{2}$ வினாடியில் 16 பவு. 4 அடி விழுகிறது. சிறியது 4 அடி தான் மேலே போயுள்ளது. ஆகவே, நூல் பழைய இறுக்கநிலைக்கு வந்துள்ளது.]

(ii) இறுகும்போது

பெரிய துகளின் வேகம்

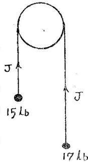
$= 32t = 32 \times \frac{1}{2}$

$= 16$ அடி/வினாடி கீழ்நோக்கி.

சிறிய துகளின் வேகம்

$= 16 - 32t$

$= 16 - 32 \times \frac{1}{2} = 0$



படம் 71.

இழுத்தாக்கு விசை J ஆகுக. பொது விசை கீழ்நோக்கி v ஆகுக.

$\therefore$ பெரிய துகளுக்கு J மேல்நோக்கி ஆவதால்

$-J = +17v - 17 \times 16$

சிறிய துகளுக்கும் J மேல்நோக்கி ஆவதால்

$J = 15v$

$\therefore \quad 0 = 32v - 17 \times 16$

$$\therefore \quad v = \frac{17 \times 16}{32} = \frac{17}{2} \text{ அடி/விநடி.}$$

$$v = 8{\cdot}5 \text{ அடி/விநடி.}$$

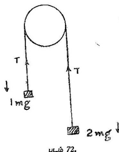
மாற்று முறை

[குறிப்பு: இரண்டிற்கும் உள்ளுறு விசையாதலால் இரண்டின் பொருண்மைய வேகம் மாறுபடாது.

$$\therefore \quad \frac{17v + 15v}{32} = \frac{17 \times 16 + 15 \times 0}{32}$$

$$\therefore \quad v = \frac{17 \times 16}{32} = 8\tfrac{1}{2} \text{ அடி/விநடி.]}$$

கணக்கு: இரு பொருள்களின் திணிவு முறையே m, $2m$; இவை ஒரு கப்பிவழிச் செல்லும் நூலால் இணைக்கப்பட்டுக் கப்பிக்கு இருபுறமும் தொங்குகின்றன. அவை இயங்கும்போது அவற்றின் பொது முடுக்கம் என்ன? இவற்றுள் $2m$ திணிவுள்ள பொருள் 3 விநடி நேரங் கழித்துத் தரையைத் தாக்கி இருந்துவிட்டால், இதற்குப்பிறகு எப்போது நூல் மறுபடியும் இறுக்கமாகும். அந்தப் பொருள் தரையி லிருந்து எவ்வளவு உயரம் செல்லும்?



படம் 72.

இரண்டின் பொது முடுக்கம் f ஆகுக.

நூலின் இழுவிசை T ஆகுக

$$\therefore \quad 2mg - T = 2mf$$

$$T - mg = mf$$

$$\therefore \quad mg = 3\,mf$$

$$\therefore \quad f = \frac{g}{3}$$

$$\therefore \quad \text{பொது முடுக்கம்} = \frac{g}{3}$$

3 விநடி நேரத்தில் இரண்டின்

$$\text{பொது வேகம் } v = \frac{g}{3} \times 3 = g.$$

[$v = u + at$ எனும் சூத்திரப்படி]

(ii) ∴ தாக்கின உடனே, நூல் தளர்ந்துவிடுவதால் m எனும் பொருள்மேல் தாக்குவிசை இல்லை. அது இப்போது புவியீர்ப்பு விசையால் செயல்பட்டு மேலே, g எனும் வேகத்துடன் புறப்பட்டுச் செல்கிறது. புவியீர்ப்பு விசை எதிர்முடுக்கம் 'g' ஏற்படுத்துவதால், வேகம் குறைந்து மறுபடியும் புறப்பட்ட இடத்திற்கே $2 . \frac{g}{g}$ காலத்தில் அதாவது 2 விநாடி காலத்தில் கீழ்நோக்கி g எனும் வேகத்துடன் வருகிறது.

(iii) நூல் திடீரென இறுகுவதால் இரண்டின்மேலும் கணத்தாக்கு இழுவிசை செயல்படுகிறது. பொதுவேகம் V ஆனால்

$$2mV+mV = m . g$$

$$V = \frac{g}{3}$$

(iv) கணத்தாக்கு விசைக்குப்பிறகு, இரண்டின் பொதுமுடுக்கம் $\frac{g}{3}$. இதற்கு எதிர்த்திசையில் புறப்படும் வேகம் $\frac{g}{3}$. ∴ 1 விநாடி வரை $2m$ பொருள் மேல் நோக்கி நகருகிறது.

அது சென்ற உயரம் $= \frac{\text{“}u^2\text{”}}{2g}$ எனும் சூத்திரப்படி

$$\frac{g^2 \times 3}{9 . g} = \frac{g}{3}$$

பயிற்சி

1. 3 கிலோ, திணிவுள்ள ஒரு பொருள், விநாடிக்கு 35 செ.மீ வேகத்துடன் 2 கிலோ பொருளை, அது விநாடிக்கு 5 செ.மீ. வேகத்தில் நகர்ந்துகொண்டிருக்கும்போது தாக்கி, அதனுடன் ஒன்றுகிறது. தாக்கலுக்குப் பிறகுள்ள வேகம் என்ன ?

2. 30 கிராம் திணிவுள்ள ஒரு குண்டு 1000 செ.மீ. கிடை வேகத்தில் இயங்கும்போது 2 கிலோ எடையுள்ள ஒரு மரக்கட்டையில் தாக்கி உடன்பதிகிறது. மரக்கட்டை வழவழப்பான கிடைதளத்தில் இருந்தால், கட்டையும் குண்டும் என்ன வேகத்துடன் இயங்கத் தொடங்குகிறது ?

3. 50 டன் திணிவுள்ள ஒரு பீரங்கியினின்று 200 பவுண்டு திணிவுள்ள குண்டு விநாடிக்கு 1600 அடி வேகத்தில் வெளியே பாய்ந்தால் என்ன வேகத்துடன் பீரங்கி பின்னடைய முயலும் ?

4. ஒரு குண்டின் திணிவு m; விநாடிக்கு V வேகத்தில் M திணிவு உள்ள கட்டையைக் கிடையாகத் தாக்கி அதில் உடனே பதிகிறது. கட்டை வழவழப்பான கிடைதளத்தில் இருந்தால், மொத்த இயங்கு ஆற்றல் இழப்பு $\frac{MmV^2}{2(M+m)}$ எனக் காண்க.

5. மேற்கணக்கில் மீண்டும் முன்னர் போல ஒரு குண்டு தாக்கினால், மீண்டும் ஏற்படும் இயங்கு ஆற்றல் இழப்பு $\frac{M^2mv^2}{2(M+2m)(M+m)}$ என நிறுவுக.

6. இரண்டு பொருள்கள் A, B-ன் திணிவு முறையே m_1, m_2 $(m_1>m_2)$ ஆகும். இவையிரண்டும் இழுபடாத நூலால் இணைக்கப்பட்டு, ஒரு கப்பியின் இருபுறமாகத் தொங்குகின்றன. A என்ற பொருள் 'a' தூரம் இறங்கியவுடன் தரை தட்டுகிறது. அது மீண்டும் என்ன வேகத்துடன் எவ்வளவு நேரம் சென்றபின்னர் மேல்நோக்கி எழும்?

$$\left[\text{விடை : வேகம்} \frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{2ga(m_1-m_2)}{m_1+m_2}};\ \text{நேரம்} = 2\sqrt{\frac{2a(m_1-m_2)}{g(m_1+m_2)}}\right]$$

7. மேற்கூறிய கணக்கில் A-ன் திணிவு $3M$; B-ன் திணிவு M. A தரையிலும், B மேலேயும் ஆக இயங்காதுள்ளன. M திணிவுள்ள C எனும் மூன்றாவது பொருள் 'h' தூரம் நேர்கீழாய் விழுந்து B-யைத் தாக்கி அதனுடன் ஒன்றினால் இயக்கம் ஏற்பட்டு A எனும் பொருள் தரைமட்டத்திலிருந்து $\frac{h}{5}$ தூரம் உயர எழும் என நிறுவுக.

8. m_1, m_2 எனும் திணிவுகளை உடைய இரு துகள்கள் இழுபடா நூலால் இணைக்கப்பட்டு, ஒரு கப்பியின் இருபுறமும் தொங்குகின்றன. m_1 தரையிலும் m_2 அந்தரத்திலும் சமநிலையில் உள்ளன. m_2 எனும் துகளை நேர் மேலே 'h' தூரம் தூக்கி உடனே கீழ்விழும்படி விட்டால், துகள் 'm_1', $\frac{m_1^2h}{m_1^2-m_2^2}$ தூரம் மேலே எழும் என நிறுவுக. (இங்கு $m_1>m_2$).

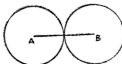
7. மீள் இயல்புடைப் பொருள்கள்

7·1. மீள் இயல்புடைப் பொருள்களின் மோதல்

நடைமுறையில் இரு குண்டுகள் மோதிக்கொண்டால், அவை யிரண்டும் ஒன்றுடன் ஒன்று சேர்ந்திருக்குங் காலத்தை, அது மிக நுண்ணியதாயினும், இரு கூறுகப் பிரிக்கலாம். முதற் கூறில் அவை அமுங்குகின்றன. தாக்குதல் விடுபடும்போது, இரண்டாவது கூறில் அவை மீண்டும் சுயவடிவை யடைகின்றன. விசை செயல்படுங்கால், சற்றே வடிவ மாறுதல் ஏற்பட்டு, விசை நீங்கிய உடனே சுய வடிவைப் பெறும் இயல்பு **'மீள் இயல்பு'** (elasticity) எனப்படும். அவ்வாறு இயல்பில்லையாயின் மீள் இயல்பிலாப் (inelastic) பொருள்கள் எனப்படும்.

ஆற்றல் காப்பு விசைகள் (conservative forces) செயல்படும் தாக்குதலை முதலில் பார்ப்போம். பொருள்கள் வழவழப்பான இரண்டு உருண்டை வடிவமான குண்டுகளாகும். ஒன்றுடன் ஒன்று அவை மோதிக் கொள்ளும்போது, தாக்குவிசை அவைகளது மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டில் செயல்படும்.

∴ **இந்தக் கோட்டிற்குக் குத்துத் திசையில் உந்த மாறுதலோ வேக மாறுதலோ ஏற்படாது.**



படம் 73.

முதல் குண்டின் மையம் A ஆகுக. இரண்டாவதன் மையம் B ஆகுக. மோதலுக்கு முன்னர் அவற்றின் வேகம் AB திசையில்

முறையே u_A, u_B ஆகுக. மோதினவுடன் வேகங்கள் முறையே v_A, v_B ஆகுக. திணிவு m_A, m_B ஆகுக.

உந்தக் காப்புக் கொள்கைப்படி

$$m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B \quad \ldots\ldots(1)$$

ஆற்றலும் மாறுவதில்லை எனக் கொண்டால்,

$$\tfrac{1}{2}m_A u_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B u_B^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2$$

$$\therefore \quad m_A (v_A^2 - u_A^2) = -m_B (v_B^2 - u_B^2)$$

$$m_A (v_A + u_A)(v_A - u_A) = -m_B (v_B + u_B)(v_B - u_B)$$

ஆனால் சமன்பாடு (1)-லிருந்து

$$m_A (v_A - u_A) = -m_B (v_B - u_B)$$

$$\therefore \quad v_A + u_A = v_B + u_B$$

$$\therefore \quad v_B - v_A = -(u_B - u_A)$$

ஆகவே மோதலினால்

இயங்கு ஆற்றல் மாறுபடாவிடில்

பந்துகளின்

பிரியும் வேகம் = அவை அணுகும் வேகம்

எனக் கூறலாம்.

மீள் இயல்புடைய கண்ணாடிக் குண்டுகள், உலோக, தந்தக் குண்டுகள் இவைகளால் செய்யப்பட்ட சோதனைகளில் மேற்கூறிய உண்மை முற்றிலும் காணப்படுவதில்லை. மோதலுக்குப் பிறகு ஆற்றல் சக்தி குறைவதால் பிரியும் வேகம், அணுகும் வேகத்தில் பின்னமாகவே காணப்படுகிறது.

நியூட்டனின், மீள் இயல்புடைப் பொருள்கள் மோதல் விதி

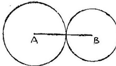
மீள் இயல்புடை இரு பொருள்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதிக் கொண்டால்

(i) ஒன்றைச் சார்ந்த மற்றதன் வேகத்தின் பொதுக் குத்துப்பிரிவு மோதலுக்குப் பின்னர் உள்ளதும், முன்னர் உள்ளதும் ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தின் அளவில் இருக்கும்; ஆனால், திசையில் எதிராக அமையும்.

(ii) இந்த விகிதம், பொருள்களின் இயல்பைப் பொறுத்ததே தவிர, அவற்றின் திணிவைச் சார்ந்ததன்று.

இவையே நியூட்டனின் மோதல் விதி (laws of impact). இதைக் கணித மொழியில் கூறுவோம்.

பொருள்களை A, B என்ற மையங்களையுடைய இரண்டு குண்டு களாகக் கொள்வோம்.



படம் 74.

A, B-யுடன் மோதுவதற்குமுன்,

A-ன் வேகத்தின் பிரிவு, AB திசையில் u_A ஆகுக.

B-ன் வேகத்தின் பிரிவு, AB திசையில் u_B ஆகுக.

AB-க்குக் குத்தாக அவற்றின் பிரிவுகள் w_A, w_B ஆகுக. தாக்குவிசை AB-ல் அமைவதால் w_A, w_B மாறுவதில்லை. ஆனால் AB என்ற திசையில் மோதலான உடன்

A-ன் வேகம் v_A

B-ன் வேகம் v_B

என்போம்.

நியூட்டனின் விதி கூறுவது

அளவில் மட்டும் $\frac{v_B - v_A}{u_B - u_A} = e \qquad (e < 1)$

ஆனால் $(v_B - v_A)$-யும், $(u_B - u_A)$-யும் எதிரெதிர்த் திசையில் உள்ளன. ஆகவே,

$$v_B - v_A = -e\,(u_B - u_A)$$

e எனும் விகிதம் மீள் இயல் குணம் (coefficient of elasticity) எனப்படும். அதன் மதிப்பு ஒன்றுக்குக் குறைந்த பின்னமாகும்.

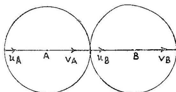
கண்ணாடிக் குண்டுகளாயின் e ஒரு மதிப்பாகும். தந்தமானால் மற்றொரு மதிப்பாகும். ஆனால், ஒரே இயல்புடைய குண்டுகளுக்கு அவற்றின் திணிவு (mass) ஏதாயினும் e-ன் மதிப்பு ஒன்றே.

இதுவே நியூட்டனின் இரண்டாவது மோதல் விதியாகும். இவை யிரண்டும் சோதனைகளின் அடிப்படையில் உருவானவை.

கண்ணாடிக் குண்டுகளுக்கு	$e = \cdot 9$
தந்தம்	$e = \cdot 8$
ஈயம்	$e = \cdot 2$
முற்றிலும் மீள் இயல்புடையது எனின்	$e = 1$
மீள் இயல்பிலா என்றால்	$e = 0$; இரண்டும் ஒன்றுடன் ஒன்று சேர்ந்துகொள்ளும்.

7·2. இரு குண்டுகளின் நேரடி மோதல் (Direct impact of two spheres)

(i) **மோதலுக்குப் பின் உள்ள வேகம் கணக்கிட :** மோதலுக்கு முன்னர் குண்டுகளின் வேகங்கள் முற்றிலும் அவைகளது மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டில் அமைந்தால் அத்தகைய மோதல் நேரடி மோதல் (direct impact) எனப்படும்.



படம் 75.

A, B என்ற இரு குண்டுகளின் திணிவு முறையே m_A, m_B; நேரடி மோதலுக்கு முன் அவற்றின் வேகம் AB திசையில் முறையே u_A ; u_B. பின்னர் u_A, u_B என்றால் v_A, v_B இவற்றின் அளவுகளைக் காண :

உந்தக் காப்பு விதிப்படி

$$m_Av_A + m_Bv_B = m_Au_A + m_Bu_B \quad \ldots\ldots(i)$$

நியூட்டனின் மோதல் விதிப்படி

$$u_A - u_B = -e\,(u_A - u_B) \quad \ldots\ldots(ii)$$

(ii)-ஐ m_B-ஆல் பெருக்கி (1) உடன் கூட்ட

$$(m_A + m_B)\ v_A = (m_A - em_B)\ u_A + m_B\,(1+e)\ u_B$$

(ii)-ஐ m_Aஆல் பெருக்கி (i)-லிருந்து கழிக்க

$$(m_A+m_B)\, v_B = (m_B-em_A)\, u_B+m_A\,(1+e)\, u_A$$

இவ்வாறு மோதலுக்குப் பின் உள்ள குண்டுகளின் வேகம் காண்கிறோம்.

(ii) மோதலினால் ஏற்படும் இயங்குசக்தி இழப்பு: நேரடியாக மோதும் இரு குண்டுகளின் திணிவு m_A, m_B ஆகுக.

மோதலுக்கு முன்னர் அவற்றின் வேகம் முறையே u_A, u_B ஆகுக.

மோதலுக்குப் பின்னர் அவை முறையே v_A, v_B ஆகுக.

உந்தக் காப்பு விதிப்படி

$$m_Av_A+m_Bv_B=m_Au_A+m_Bu_B \qquad \ldots\ldots(1)$$

நியூட்டனின் மோதல் விதிப்படி

$$v_A-v_B=-e(u_A-u_B) \qquad \ldots\ldots(2)$$

லாக்ராஞ்சசின் முற்றொருமைப்படி,

$$(m_A+m_B)\,(m_Au_A{}^2+m_Bu_B{}^2)$$
$$= (m_Au_A+m_Bu_B)^2+m_Am_B(u_A-u_B)^2 \qquad \ldots\ldots(3)$$

இதேபோல

$$(m_A+m_B)\,(m_Av_A{}^2+m_Bv_B{}^2)$$
$$= (m_Av_A+m_Bv_B)^2+m_Am_B(v_A-v_B)^2 \qquad \ldots\ldots(4)$$

(1), (2) சமன்பாட்டால்

$$(m_A+m_B)\,(m_Av_A{}^2+m_Bv_B{}^2)$$
$$= (m_Au_A+m_Bu_B)^2+m_Am_Be^2(u_A-u_B)^2 \qquad \ldots\ldots(5)$$

$\therefore$ (3)—(5) (m_A+m_B) $\times$ இருபங்கு இயங்கு சக்தி இழப்பு

$$= m_Am_B(1-e^2)\,(u_A-u_B)^2$$

$\therefore$ இயங்குசக்தி இழப்பு $= \dfrac{m_Am_B}{2(m_A+m_B)}\,(1-e^2)\,(u_A-u_B)^2$

வலப்புறம் இந்தச் சமன்பாட்டில் நேரெண்ணாக இருப்பதைக் காணலாம். மோதுவதால் குண்டுகளின் மொத்த இயங்குசக்தி குறைகிறது என்பதைக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு: மோதுவதற்கு முன் குண்டுகளின் வேகங்களின் திசை பொதுமையக்கோட்டிலிருந்து சாய்ந்து இருந்தால் u_A, u_B; v_A, v_B என்பவை அக்கோட்டின் திசையில் உள்ள வேகங்களின் பிரிவுகளாகுக.

கோட்டிற்குக் குத்தாக மோதலுக்கு முன்னர் w_A, w_B என்பவை வேகங்களின் பிரிவுகளாகுக.

மோதலினால் இவை மாறுபடுவதில்லை. ஆகவே, மோதலுக்குப் பின்னரும், அவற்றின் வேகங்கள் w_A, w_B ஆகும்.

மோதலுக்கு முன் இயங்குசக்தி

$$= \frac{1}{2} m_A (u_A^2+w_A^2)+\frac{1}{2}m_B(u_B^2+w_B^2)$$

மோதலுக்குப் பின் இயங்குசக்தி

$$= \frac{1}{2} m_A (v_A^2+w_A^2)+\frac{1}{2}m_B(v_B^2+w_B^2)$$

∴ இயங்குசக்தி யிழப்பு

$$= \frac{1}{2} [m_A u_A^2+m_B u_B^2]-\frac{1}{2}[m_B v_A^2+m_B v^2_B]$$

இதில் மையக்கோட்டுக் குத்தாக உள்ள பிரிவைக் காணேம். ஆகவே, சாய்வு மோதலிலும் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

$$= \frac{m_A m_B}{2(m_A+m_B)} (1-e^2) (u_A-u_B)^2)$$

(iii) **மோதல் தாக்களவு :** இரு பந்துகள் A, B இவற்றின் திணிவு m_A, m_B; மோதலுக்கு முன்னர் AB திசையில் அவற்றின் வேகங்கள் u_A, u_B ; பின்னர் அவற்றின் வேகங்கள் v_A, v_B.

∴ B-ன் மேல் தாக்களவு $\quad I = B$-ன் உந்த மாறுதல்

$$I = m_B(v_B-u_B)$$

A-ன் மேல் தாக்களவு $-I = m_A(v_A-u_A)$

$$\therefore \quad I\left[\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_A}\right] = (v_B-v_A)-(u_B-u_A)=(1+e) \ (u_A-u_B)$$

$$I = \frac{m_A m_B}{m_A+m_B} (1+e) (u_A-u_B)$$

கணக்கு 1 : ஒரு வழவழப்பான சமதளத்தில் A, B, C எனும் மூன்று சம வடிவுள்ள குண்டுகள் நேர்கோட்டில் உள்ளன. B, C-ன் திணிவுகள் சமம் ; A-ன் பொருண்மை திணிவு அவற்றைப்போல இரு மடங்கு. $AஐBC$ என்ற திசையில் தட்டிவிட்டால், முடிவில் C-ன் வேகம் என்ன என்பதைக் காணவும். மீள் இயல்பு குணகத்தின் மதிப்பு $\frac{2}{3}$ எனக் கொள்ளவும்.

A, B இவை மோதல்

குண்டுகள்	திணிவு	வேகம் மோதலுக்கு முன்னர்	பின்னர்
A	$2m$	u	V_A
B	m	0	V_B

$$\therefore \quad V_A - V_B = e\,u$$

$$2mV_A + mV_B = 2mu$$

$$\therefore \quad 2V_A + V_B = 2u$$

$$\therefore \quad 3V_A = u[2-e]$$

$$3V_B = u[2+2e]$$

$$\therefore \quad V_B = \frac{2}{3}u(1+e) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3}u = \frac{10u}{9}$$

B-ம் *C*-ம் மோதல்

குண்டு	திணிவு	வேகம் மோதலுக்கு முன்னர்	பின்னர்
B	m	$\frac{10u}{9}$	w_B
C	m	0	w_C

$$w_B - w_C = -e\,\frac{10u}{9}$$

$$w_B - w_C = -\frac{20u}{27}$$

$$w_B + w_C = \frac{10u}{9}$$

$$\therefore \; 2w_C = \frac{50u}{27}$$

$$\therefore \; w_C = \frac{25u}{27}$$

$\therefore$ Cயின் வேகம் $= \frac{25}{27}u$ [A-ன் முதல் வேகம் u]

குறிப்பு : $w_B = -\frac{5u}{9}$

ஆகவே B வந்த வழியே மீள்கிறது. அது A-யுடன் மோதும். இந்த மோதலுக்குப் பின்னர் A, B-ன் வேகத்தைக் கணக்கிடவும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. இரண்டு சமவடிவமுள்ள குண்டுகள் ஒன்றையொன்று நேரடியாகத் தாக்கிக்கொள்ள, மோதலுக்குப் பின்னர் ஒன்றன் வேகம் மற்றதினதாக ஆகிறது என்றால் அவைகளின் திணிவுகள் சமமெனவும், முற்றிலும் மீள் இயல்புடையன எனவும் நிறுவுக.

2. ஒரே நேர்கோட்டில் இயங்கும் இரண்டு சிறு குண்டுகள் A, B-ல் A-யினது திணிவு B-யினதைப்போல் n மடங்கு. B-யினது வேகம், A-யின் வேகத்தைப்போல் m மடங்கு. இரண்டும் ஒரே திசையில் இயங்குகின்றன. B, Aஐத் தாக்கினவுடன் இயங்காது நின்றுவிட்டால் மீள் இயல்பு குணம் $\dfrac{m+n}{m(n-1)}$ எனக் காண்க.

3. A, B, C என்ற மூன்று சமவடிவுடைய குண்டுகளின் திணிவு முறையே m, $2m$, m ஆகும். மீள் இயல்பு குணகம் $\frac{1}{2}$. u எனும் வேகத்துடன் A, Bஐ நோக்கித் தட்டப்படுகிறது. அவற்றின் இறுதி வேகங்கள் $0:1:2$ எனும் விகிதத்தில் உள்ளன என நிறுவுக.

4. ஒரே நேர்கோட்டில் ஒரே திசையில் V_1, V_2 எனும் வேகங்களுடன் இயங்கும் இரு சமவடிவுடைய குண்டுகள் மோதிக்கொண்டால், அவற்றிடையே ஒன்றிலிருந்து மற்றதற்கு மாறும் உந்த அளவைக் கணக்கிடுக. மோதலுக்குப் பிறகு அவற்றின் வேகங்கள் u_1, u_2 என்றும், $V_1+V_2+u_1+u_2=0$ எனவும் ஆனால், இரண்டு குண்டுகளும் தனித்தனியே இழக்கும் இயங்கு ஆற்றல் சமமெனக் காண்க.

5. ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ள A, B, C என்ற மூன்று குண்டுகளின் திணிவு முறையே M_A, M_B, M_C ஆகும். A எனும் குண்டு Bஐ நோக்கித் தட்டிவிடப்படுகிறது. குறைந்தது மூன்று மோதல்களாவது ஏற்பட வேண்டுமானல் $M_A\ M_C\ (1+e+e^2) > eM_B\ (M_A+M_B+M_C)$ எனக் காண்க. (e என்பது மீள் இயல்பு குணகம்)

6. இரண்டு சம திணிவு வடிவமுமுள்ள சிறு குண்டுகள் A, B வட்டவடிவமான குழாயிலுள்ளன. குழாய் கிடைதளத்திலுள்ளது. AB வட்டத்தின் விட்டமாய் அமையும்போது A நகர்ந்து 't' நேரத்திற்குப் பிறகு Bஐத் தாக்குகிறது. $\dfrac{2t}{e}$ காலத்திற்குப் பிறகு அவை மறுபடியும் மோதிக்கொள்ளும் என நிறுவுக. [M. U. Sept. 63]

7. ஒரு நேர்கோட்டில் m_1, m_2, m_3......எனப் பல குண்டுகள் உள்ளன. mr குண்டிற்கும் m_{r+1} குண்டிற்கும் மோதலில் மீள் இயல்பு குணகம் $\dfrac{m_{r+1}}{m_r}$. முதல் குண்டு புறப்பட்டு இரண்டாவதைத் தாக்குகிறது. அதன் விளைவால் ஏற்படும் அடுத்தடுத்த மோதலில் ஒவ்வொரு குண்டின் வேகமும் m_1-ன் புறப்படு வேகமே என நிறுவுக.

8. மேற் கணக்கில் குண்டுகள் சம திணிவுகள் உடையனவாகவும் சமவடிவாகவும் கொள்க; அவற்றிடையே மீள் இயல்பு குணகம்

e என இருந்தால் மோதலுக்குப் பின்னர் உள்ள வேகங்கள் பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன எனக் காண்க. $\left[\text{பொது வீதம் : } \frac{1+e}{1-e}\right]$

9. A, B என்ற இரு குண்டுகளில் B, Aஐப்போல் இரு மடங்கு திணிவு உடையது. இரண்டும் ஒரே திசையில் நேர்கோட்டில் இயங்குகின்றன. B-யினது வேகத்தைப்போல் 7 மடங்கு வேகத்துடன் A, Bஐத் தாக்கி நின்றுவிட்டால் மீள் இயல்பு குணகம் $\frac{3}{4}$ எனக் காண்க.

7·3. குண்டு தளத்துடன் மோதல் (Impact of a sphere with a surface)

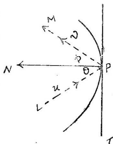
நியூட்டனின் மோதல் விதியை மீண்டும் கூறுவோம். இரு பொருள்களில் ஒன்று மற்றொன்றுடன் மோதும்போது,

(i) ஒன்றைச் சார்ந்த மற்றதன் வேகத்தின் (Relative velocity of one w.r.t. another) குத்துப் பிரிவு, மோதலுக்குப் பின்னர் உள்ளதும் முன்னர் உள்ளதும் ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் இருக்கும்; ஆனால் திசையில் எதிராக அமையும்.

(ii) இந்த விகிதம் பொருள்களின் இயல்பைப் பொறுத்ததே தவிர அவற்றின் திணிவைச் சார்ந்ததன்று.

(iii) வேகத்தின் தொடுகோட்டுப் பிரிவு (Tangential component) மாறுபடாது.

ஒரு இயங்காத தளத்துடன் ஒரு குண்டின் மோதலைப் பார்ப்போம். தளம் சமதளமாக இருக்க வேண்டியதில்லை. வளை தளமாகவும் இருக்கலாம். AB என்பது வளைதளம். ஒரு குண்டு u என்ற வேகத்துடன், தளத்தை P-ல் LP திசையில் மோதுகிறது. மோதலுக்குப் பிறகு அதன் வேகம் என்ன என்பதைக் காணவேண்டும்.



படம் 76.

வளைவரைக்கு TP தொடுகோடாகுக. PN குத்துக்கோடாகுக. $\angle LPN = \theta$ ஆகுக.

மோதலுக்குப் பிறகு குண்டின் வேகம் PM என்ற திசையில் v ஆகுக. $\lfloor NPM = \phi$ ஆகுக.

அப்போது குண்டின் தளத்தைச் சார்ந்த வேகம்

மோதலுக்குப்பின்னர் LP திசையில் u

இதன் பிரிவு (component) NP திசையில் $u \cos \theta$

தொடுகோடாகிய TP திசையில் $u \sin \theta$.

மோதலுக்குப் பின்னர் சார்ந்த வேகம் PM திசையில் v

∴ இதன் குத்துப் பிரிவு PN திசையில் $v \cos \phi$

தொடுகோடாகிய TP திசையில் $v \sin \phi$

நியூட்டனின் மோதல் விதிப்படி.

$$v \cos \phi = e\, u \cos \theta \quad [e\text{—மீள் இயல்பு குணகம்}]$$

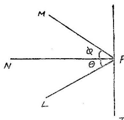
$$v \sin \phi = u \sin \theta$$

$$\tan \phi = \frac{1}{e} \tan \theta\, ;$$

$$v^2 = u^2 [\sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta]$$

இவ்வாறு மோதலுக்குப் பின்னர் உள்ள வேகத்தையும், திசையையும் காண்கிறோம்.

குறிப்பு 1: சமதளமானாலும் இதே பொருந்தும்; தொடுகோடு தளத்தைக் குறிக்கும்.



படம் 77.

குறிப்பு 2: $e=1$ என்றால் மட்டுமே $\phi = \theta$ ஆகும். $v = u$ எனவும் ஆகும்.

மற்றபடி $e < 1$ ஆனதால், $\phi > \theta$; $v < u$ எனவரும்.

குறிப்பு 3 : மோதல் தாக்களவு = உந்தமாறுதல்

$$= m[v\cos\phi - (-u\cos\theta)]$$
$$= m[eu\cos\theta + u\cos\theta]$$
$$= mu\cos\theta\,(1+e)$$

குறிப்பு 4 : இயங்கு ஆற்றல் இழப்பு $= \frac{1}{2}m\,(u^2 - v^2)$

$$= \tfrac{1}{2}mu^2\,\{1 - \sin^2\theta - e^2\cos^2\theta\}$$
$$= \tfrac{1}{2}mu^2\cos^2\theta\,(1-e^2)$$

7·4. தளத்துடன் குண்டு மோதுதல்

கணக்கு 1 : ஒரு சமதளத்திலிருந்து u என்ற வேகத்துடன் கிடைகோட்டிற்கு 'α' எனும் கோண உயர்வில் ஒரு குண்டு எறியப் படுகிறது. அதன் மீள் இயல்பு குணகம் e எனின் அது தளத்தில் மீண்டும் மீண்டும் $\frac{2u\sin\alpha}{g(1-e)}$ காலத்திற்கு விழுந்து பிறகு தளத்திலேயே உருள்கிறது என நிறுவுக. (M.U. April 67)

[இங்குக் குண்டுமீது புவியீர்ப்பு விசை செயல்படுகிறது. தளத்தில் விழும்போது கணத்தாக்குவிசை நிலைத்திசையில் செயல்படுகிறது. ஆகவே குண்டின் வேகத்தின் கிடைபிரிவு இருவிசைகளாலும் பாதிக்கப் படாமல் மாறாது இருக்கிறது. ஆனல் நிலைப்பிரிவு மட்டும் மாறுகிறது.]

நிருபணம் : வேகத்தின் நிலைப்பிரிவு $u\sin\alpha$

∴ மீண்டும் திரும்பு காலம் t_1 ஆகுக.

அப்போது $t_1 = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

திரும்பு வேகம் $= u\sin\alpha$ கீழ்நோக்கி

∴ மேலெழும் வேகம் $= eu\sin\alpha$

மீண்டும் திரும்பு காலம் $t_2 = \frac{2eu\sin\alpha}{g}$

இவ்வாறாக அடுத்தடுத்த திரும்புங்காலம் முறையே

$\frac{2e^2u\sin\alpha}{g}$, $\frac{2e^3u\sin\alpha}{g}$,...என்பதாகும்

ஆகவே இவற்றின் கூடுதல் $= \frac{2u\sin\alpha}{g}(1+e+e^2+\ldots\ldots\infty)$

$$= \frac{2u\sin\alpha}{g}\cdot\frac{1}{1-e}$$
$$= \frac{2u\sin\alpha}{g(1-e)}$$

$e<1$ ஆனதால் காலம் குறைந்துகொண்டே வந்து $\frac{2u \sin \alpha}{g(1-e)}$ காலத்திற்குப் பிறகு குண்டு உருள்கிறது.

குறிப்பு 1: மேற்கணக்கில் வேகத்தின் கிடைபிரிவு $= u \cos \alpha$.
$\therefore$ புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து
$\frac{2u \sin \alpha}{g(1-e)} u \cos \alpha$ தூரத்திலிருந்து அது உருள்கிறது.

அதாவது அதன் தூரம் $= \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g(1-e)}$

கணக்கு 2: ஒரு சிறுபந்து, d தூரத்திலுள்ள ஒரு சுவரை நோக்கி 'α' ஏற்றக் கோணத்தில் 'V' என்ற வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. அது, சுவரில் மோதி, மீண்டு சுவரிலிருந்து $e\left[\frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} - d\right]$ என்ற தூரத்திலுள்ள இடத்தை அடைகிறது எனக் காண்க. [e என்பது மீள் இயல்பு குணகம். எறியும் இடம், மீண்டு அடையும் இடமும் ஒரே கிடைதளத்தில் அமைந்தனவாகும்.]

[கணக்கை ஆராய்வோம்: இங்கு மேற்கணக்கைப் போலவே புவியீர்ப்பு விசையும் கணத்தாக்கு விசையும் பந்தின்மேல் செயல் படுகின்றன. கணத்தாக்குவிசை கிடைதிசையில் உள்ளது. புவியீர்ப்பு விசை மேல்கீழாக நிலைத்திசையில் உள்ளது. ஆகவே, இந்தக் கணக்கில், வேகத்தின் நிலைப்பிரிவை புவியீர்ப்பு விசை மட்டுமே பாதிக்கிறது.

(ii) கிடைபிரிவு சுவரில் மோதும்வரை மாறாது. மோதினபின் உள்ள கிடைபிரிவு விசையும் பின்னர் மாறாது.

இவ்விரு கொள்கைகளைக் கொண்டு கணக்கை விடுவிக்கவேண்டும்.]

நிரூபணம்: பந்து சுவரில் பட்டு மீண்டும் அதே கிடைதளத்திற்கு வர ஆகும் காலம் 't' ஆகுக.

வேகத்தில் நிலைப்பிரிவு $= V \sin \alpha$

$\therefore$ மேல் எழுந்து திரும்ப வரக் காலம் $= \frac{2V \sin \alpha}{g}$ ...... (1)

(ii) சுவரில் மோதுவதற்குள்ள காலம் t_1 ஆகுக,

கிடைபிரிவு $= V \cos \alpha$

சுவரின் தூரம் $= d$

$$\therefore t_1 = \frac{d}{V \cos \alpha}$$

சுவற்றிலிருந்து மீள்கிடைவேகம் $eV \cos \alpha$

காலம் t_2 ஆகுக ; தூரம் x ஆகுக

$$\therefore t_2 = \frac{x}{eV \cos \alpha}$$

ஆனல் $t = t_1 + t_2$

$$\therefore \frac{2V \sin \alpha}{g} = \frac{d}{V \cos \alpha} + \frac{x}{eV \cos \alpha}$$

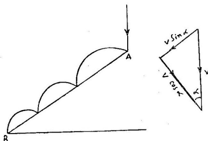
$$\therefore \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} = d + \frac{x}{e}$$

$$\therefore x = e\left[\frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} - d\right]$$

கணக்கு 3: ஒரு குண்டு 20 அடி தூரம் நேராக விழுந்து ஒரு சாய்தளத்தைத் தாக்குகிறது. மீண்டும் எழுந்து, மீண்டும் மீண்டும் சாய்தளத்தைத் தாக்கி இன்னும் மூன்ருவது தாக்கலில் சாய்தளத்தின் அடியை அடைகிறது. தளத்தின் சாய்வு 30°ஆகவும், அடியிலிருந்து முதல் தாக்கலின் தூரம் 12 அடியாகவும் ஆனல்

$$e(1+e)(1+e^2)(1+e+e^2) = \cdot 3 \text{ எனக்காட்டு}$$

[e என்பது மீள் இயல்புக்குணகம்]



படம் 78

கணக்கை ஆராய்தல்: சாய்தளத்துடன் மோதுவதால், தளத்தின் திசையில் கணத்தாக்கு விசையில்லை. புவியீர்ப்பு விசையின்

பிரிவுமட்டும் உள்ளது. தளத்திற்குக் குத்தாகமட்டும் கணத்தாக்கு விசையுள்ளது.

நிறுபணம் :

(i) குண்டு, தளத்தை A என்ற இடத்தில் V எனும் வேகத்துடன் தாக்கட்டும். அது விழும் தூரம் 'h' என்றால்

$$V^2 = 2gh \qquad \ldots\ldots(1)$$

(ii) தளத்தின் சாய்வில் கீழ்நோக்கிப் பிரிவு $V \sin \alpha$. இதில் $V \sin \alpha$ என்பது கணத்தாக்கு விசையால் மாறுவதில்லை. ஆனால் இதே திசையில் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் பிரிவான $g \sin \alpha$-ஆல் மாறுபடுகிறது. சாய்தளத்தின் அடி B எனின் $AB = l$ ஆகுக. இதை அடைய காலம் 't' ஆகுக.

$\therefore$ "$x = ut + \frac{1}{2}at^2$" எனும் சூத்திரப்படி,

$$l = V \sin \alpha . t + \frac{g \sin \alpha . t^2}{2} \qquad \ldots\ldots(2)$$

(iii) தளத்திற்குக் குத்தாக V-யின் பிரிவு தளத்தைநோக்கி $V \cos \alpha$;

அதே திசையில் ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் பிரிவு $= g \cos \alpha$

தாக்குதலுக்குப் பிறகு, வேகத்தின் குத்துப்பிரிவு $= eV \cos \alpha$

$\therefore$ மீண்டும் முதல்முறை தளத்தில் விழும் காலம் $= \dfrac{2eV \cos \alpha}{g \cos \alpha}$

$$= \frac{2eV}{g}$$

தளத்தை அடையும் வேகம் $eV \cos \alpha$; மீள்வேகம் $e^2 V \cos \alpha$

$\therefore$ இரண்டாவது முறை விழும் காலம் $= \dfrac{2e^2 V \cos \alpha}{g \cos \alpha}$

$$= \frac{2e^2 V}{g}$$

இதேபோல மூன்றாவது முறை விழும் காலம் $= \dfrac{2e^3 V}{g}$

$\therefore$ மொத்தகாலம் $t = \dfrac{2eV}{g}(1 + e + e^2)$

(2)-ல் பிரதியிட

$$\therefore l = \frac{2eV^2}{g} \sin \alpha (1 + e + e^2) + \frac{2e^2 V^2}{g}(1 + e + e^2)^2 \sin \alpha$$

$$= \frac{2eV^2}{g} \sin \alpha [1 + e + e^2] (1 + e + e^2 + e^3)$$

$$= \frac{2eV^2}{g} \sin \alpha \,(1+e)\,(1+e^2)\,(1+e+e^2)$$

இங்கு $V^2 = 2gh$; $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

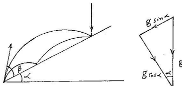
$l = 2h\, e(1+e)\,(1+e^2)\,(1+e+e^2)$;

$h = 20 \quad l = 12$ எனப் பிரதியிட

$\therefore \; \cdot 3 = e(1+e)\,(1+e^2)\,(1+e+e^2)$

கணக்கு 4 : கிடைகோட்டிற்கு α கோணத்தில் உயர்ந்துள்ள சாய்தளத்தின்மீது அதன் அடியிலிருந்து, சாய்தளத்துடன் β கோணத்தில் உள்ள திசையில் V வேகத்துடன் ஒரு குண்டு எறியப்படுகிறது. அது தளத்தில் குத்தாக விழுந்தால் $2 \tan \alpha \tan \beta = 1$ என நிறுவுக.

அது மீண்டும் எழும்பி இரண்டு தாவல்களில் புறப்பட்ட இடத்தை அடைந்தால், மீள் இயல்புக் குணகம் $e = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ எனக் காண்க.



படம் 79.

[கணக்கை ஆராய்தல் : (i) தளத்தைக் குத்தாகத் தாக்குகிறது என்றால், அப்போது குண்டு வேகத்தின் சாய்தளத் திசைப்பிரிவு பூஜ்யமாகிறது எனப்பொருளாகும். தளத்தை மீண்டும் அடையும் காலமும், சாய்தளப்பிரிவு பூஜ்யம் ஆகும் காலமும் ஒன்றே. இதைப் பயன்படுத்தி முதல் விடை காணவேண்டும்.

(ii) இரண்டு தாவல்களுக்கு ஆகும் காலமும், குண்டின் வேகத்தின் சாய்தளப்பிரிவு மீண்டும் புறப்பட்ட அளவுக்கு வரும் காலமும் ஒன்றே. இதை இரண்டாவது விடை காணப் பயன்படுத்தவும்.]

நிரூபணம் :

சாய்தளத்தின் திசையில் வேகத்தின் பிரிவு $= V \cos \beta$

அந்தத்திசைக்கு எதிரான திசையில் ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் பிரிவு $= g \sin \alpha$

$$\therefore \text{ சாய்தளப்பிரிவு பூஜ்யமாகக் காலம்} = \frac{V\cos\beta}{g\sin\alpha}$$

புறப்படுவேகத்தின் தளத்திற்குக் குத்துப் பிரிவு $= V\sin\beta$

அதற்கு எதிராகவுள்ள ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் பிரிவு $= g\cos\alpha$

$$\therefore \text{ மீண்டும் குண்டு தளத்தை யடையக் காலம்} = \frac{2V\sin\beta}{g\cos\alpha}$$

$$\text{இரண்டு காலங்களும் சமமானதால் } \frac{V\cos\beta}{g\sin\alpha} = \frac{2V\sin\beta}{g\cos\alpha}$$

$$\therefore 2\tan\alpha\tan\beta = 1$$

(ii) தளத்தைத் தாக்கும் குத்துவேகம் = அளவில் புறப்படும் வேகம் $= V\sin\beta$

$$\therefore \text{ தளத்திலிருந்து எழும்பும் வேகம்} = eV\sin\beta$$

$$\therefore \text{ இதற்கு எதிர் முடுக்கம்} = g\cos\alpha$$

$$\therefore \text{ திரும்பும்போது முதல் தாவலுக்கு ஆகும் காலம்} = \frac{2eV\sin\beta}{g\cos\alpha}$$

$$\text{தாக்கும் வேகம்} = eV\sin\beta$$

$$\therefore \text{ இரண்டாவது புறப்படும் வேகம்} = e^2V\sin\beta$$

$$\therefore \text{ இரண்டாவது தாவலுக்கு ஆகும் காலம்} = \frac{2e^2V\sin\beta}{g\cos\alpha}$$

$$\therefore \text{ மொத்தக் காலம்} = \frac{2eV\sin\beta(1+e)}{g\cos\alpha}$$

இது சாய்தளப் பிரிவு வேகம் $g\sin\alpha$ முடுக்கத்துடன் மீண்டும் $V\cos\beta$ ஆவதற்குள்ள காலமாகும்.

$$\therefore \frac{V\cos\beta}{g\sin\alpha} = \frac{2eV\sin\beta(1+e)}{g\cos\alpha}$$

$$\therefore 2\tan\alpha\tan\beta\, e(1+e) = 1$$

ஆனல் $2\tan\alpha\tan\beta = 1$

$$\therefore e(1+e) = 1$$

$$e^2+e-1 = 0$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. 100 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுர உச்சியிலிருந்து ஒரு பந்தைக் கிடைதிசையில் 100 அடி வேகத்துடன் எறிந்தால், வழவழப்பான தரையில்பட்டு முதல் தாவலில் 40 அடி போனால் மீள்இயல்புக் குணகம் ·8 எனக் காண்க.

2. ஒரு பந்து 'd' தூரத்தில் உள்ள சுவற்றை நோக்கி எறியப் படுகிறது. அதன் புறப்படும் வேகம் V; திசை கிடைகோட்டிற்கு α கோணம் உயர்ந்துள்ளது. e மீள் இயல்புக் குணகம். பந்து சுவற்றைத் தாக்கி மீண்டும் எறியப்படும் இடத்தை அடைந்தால்,

$$1+\frac{1}{e} = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{gd} \text{ எனக் காண்க.}$$

3. மேற்கணக்கில் $V = 24\sqrt{3}$, $\alpha = 45°$, $d = 18$, $g = 32$ என்றால் $e = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டு.

4. ஒரு சிறு துகள் வழவழப்பான சாய்தளத்தில் கீழாக நகர்ந்து சமதளத்தில் தாக்கி, எழும்பி விழுகிறது. அது h அடி உயரத்திலிருந்து இயங்க ஆரம்பித்தால் அது முதல் தாவலில் போகும் கிடைதூரம் $4eh \cos\alpha \sin\alpha$ எனக் காண்க. (α என்பது சாய்தளத்தின் சாய்வுக் கோணம்; e மீள் இயல்புக் குணகம்)

5. சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. அது சாய்தளத்தை மீண்டும் மீண்டும் தாக்கி மேல்நோக்கிச் சென்று r-வது தாக்கல் சாய்தளத்திற்குக் குத்தாக அமைகிறது. புறப்பட்டதிலிருந்து அதன் n-வது தாக்குதல் மீண்டும் புறப்பட்ட இடத்திலேயே அமைகிறது என்றால் $e^n - 2e^r + 1 = 0$.

6. α கோணம் சாய்வுள்ள சாய்தளத்தின் மீது, தளத்துடன் β கோணத்தில் ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. அது n-வது தாவலில் மீண்டும் புறப்பட்ட இடத்தை அடைந்தால் $(1-e)\cot\alpha \cot\beta = 1-e^n$ எனக் காண்க. (e என்பது மீள் இயல்புக் குணகம்)

7. α கோணம் சாய்வுள்ள சாய்தளத்தின் மீது அதனுடன் β கோணமுள்ள திசையில் ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. பந்து தளத்தில் விழுந்து நேர் மேலே எழும்புமானால் $(e+1)\sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta-\alpha)$ எனக்காண்க.

8. தரைமட்டத்திலிருந்து ஒரு பந்து 45° உயரக் கோணத்தில் $17\sqrt{2}$ அடி வேகத்தில் எறியப்படுகிறது. $3\frac{3}{4}$ அடி உயரமுள்ள மேசை

மீது விழுந்து மீண்டும் தரையில் விழுகிறது. விழுமிடம், எறியப்பட்ட இடத்திலிருந்து $23\frac{3}{8}$ அடி தூரத்தில் உள்ளது என நிறுவுக.

7·5. சாய்வுத் தாக்குதல் (Oblique impact)

கணக்கு 1 : முற்றிலும் மீள் இயல்புடைய இரு குண்டுகளில் ஒன்று இயங்காமல் நிலையாக உள்ளது. அதை மற்று வேகத்துடன் தாக்குகிறது. பிறகு இரண்டின் பாதைகள் ஒன்றற்கொன்று குத்தாக வுள்ளன என்றால் அவற்றின் திணிவுகள் சமமெனக் காண்க. (M. U.)

A என்ற குண்டு B-ஐத் தாக்கட்டும்.

குண்டு	திணிவு	வேகம் A, B திசையில் பின்னர்	முன்னர்	$\perp^r AB$
A	m_1	v_A	u	w_A
B	m_2	v_B	O	O

AB-க்குக் குத்து திசையில் வேகப் பிரிவுகள் முன்னரும் பின்னரும் ஒன்றே. முற்றிலும் மீள் இயல்புடையன ஆதலால் $e = 1$

$$\therefore\ v_A - v_B = -u$$

$$m_1 v_A + m_2 v_B = m_1 u$$

$$\therefore\ (m_1 + m_2) v_A = (m_1 - m_2) u$$

B-ன் பாதை AB என்ற திசையிலாகும். ஏனெனில் வேகத்தின் பிரிவு AB-க்குக் குத்து திசையில் 0.

$\therefore$ A-ன் பாதை AB-க்குக் குத்தாகும்.

$\therefore\ v_A = 0 \qquad \therefore\ m_1 = m_2$

$\therefore$ குண்டுகளின் திணிவுகள் சமம்.

கணக்கு 2 : இரண்டு குண்டுகள் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதிக் கொள்ளும் போது அவைகளின் வேகங்கள் அளவில் u_1, u_2; அவற்றின் திசைகள் பொதுமையக் கோட்டுடன் θ_1, θ_2 எனும் கோணச் சாய்வில் உள்ளன. மீள் இயல்புக் குணகம் e; அவற்றின் திணிவுகள் m_1, m_2 என்றால் மோதலுக்குப் பிறகு அவற்றின் வேகங்களின் அளவையும், திசையையும் காண்க.

குண்டு	திணிவு	வேகம் AB திசையில் பின்னர்	முன்னர்	$\perp^r AB$
A	m_1	v_A	u_A	w_A
B	m_2	v_B	u_B	w_B

(இங்கு முன்னரும் பின்னரும் AB-க்கு குத்து திசையில் வேகப் பிரிவு ஒன்றே $\therefore\ w_A = u_1 \sin\theta_1;\ w_B = u_2 \sin\theta_2;$)

$$v_A - v_B = -e\,(u_A - u_B)$$

$$m_1 v_A + m_2 v_B = m_1 u_A + m_2 u_B$$

$$\therefore\ (m_1+m_2)v_A = u_A\,(m_1 - em_2) + m_2 u_B\,[1+e]$$

$$(m_1+m_2)v_B = m_1 u_A\,[1+e] + u_B\,[m_2 - em_1]$$

ஆனால் $u_A = u_1\cos\theta_1 \qquad u_B = u_2\cos\theta_1$

$$\therefore\ (m_1+m_2)\,v_A = (m_1 - em_2)\,u_1\cos\theta_1 + m_2\,(1+e)\,u_2\cos\theta_2$$

$$(m_1+m_2)\,v_B = (m_2 - em_1)\,u_2\cos\theta_2 + m_1\,(1+e)\,u_1\cos\theta_1$$

$v_A,\ w_A;\ v_B,\ w_B$ இவற்றின் அளவுகள் கண்டதால்

(i) A-யின் வேக அளவு $\sqrt{v_A^2 + w_A^2}$; Bயின் வேக அளவு $= \sqrt{v_B^2 + w_B^2}$ அவற்றின் திசைகள் ABயுடன் முறையே $\phi_1,\ \phi_2$ சாய்வில் இருக்கட்டும் அப்போது

(ii) $\tan\phi_1 = \dfrac{w_A}{v_A} \qquad \tan\phi_2 = \dfrac{w_B}{v_B}$

இப் பாதைகள் ஒன்றற்கொன்று குத்தானால் $\dfrac{w_A w_B}{v_A v_B} = -1$ ஆகும்.

$\therefore\ v_A v_B + w_A w_B = 0$ ஆகும்.

கணக்கு 3 : முற்றிலும் மீள் இயல்புடை, சமத்திணிவுள்ள குண்டு கள் இரண்டு ஒன்றையொன்று மோதிக்கொள்ளும் போது அவைகளின் வேகங்கள் அளவில் சமமாகவும், திசையில் குத்தாகவும், ஒன்றின் வேகம் பொதுமையக் கோட்டுதிசையிலும் உள்ளன. மற்றதன் திசை, மோதலினால் 45° திரும்புகிறது என நிறுவுக. (*M.U.*)

குண்டுகள்	திணிவு	AB திசையில் வேகம் பின்னர்	AB திசையில் வேகம் முன்னர்	$\perp^r AB$ வேகம்
A	m	v_A	u_A	O
B	m	v_B	O	w_B

$$e = 1$$

$$\therefore\ v_A - v_B = -u_A$$

$$v_A + v_B = u_A$$

$$\therefore\ v_B = u_A$$

$\therefore$ B-ன் வேகத்தின் சாய்வு AB-யுடன் $\theta°$ சாய்வானால்

$\tan\theta = \dfrac{w_B}{v_B} = \dfrac{w_B}{u_A}$ ஆனால் $w_B = u_A$

$\therefore\ \tan\theta = 1 \qquad \therefore\ \theta = 45°$

$\therefore$ B-யின் திசை 45° சாய்வில் திரும்புகிறது.

கணக்கு 4: M எனும் திணிவுள்ள நிலையாக இருக்கும் குண்டை m எனும் திணிவுடைய குண்டு சாய்வாகத் தாக்குகிறது. $m=eM$ என்றால் குண்டுகளின் வேகங்களின் திசையைக் காண்க.

குண்டுகள்	திணிவு	AB திசையில் வேகம் பின்னர்	AB திசையில் வேகம் முன்னர்	$\perp^r AB$ வேகம்
A	M	v_A	O	O
B	m	v_B	u_B	w_B

$m = eM$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad v_A - v_B = eu_B$$

$$Mv_A + mv_B = mu_B$$

$$\therefore (M+m)v_A = mu_B(1+e)$$

$$(M+m)v_B = u_B(m-eM) = 0$$

$$\therefore v_B = 0$$

∴ குண்டு B-யின் AB திசைவேகம் மோதலுக்குப் பிறகு 0

∴ குண்டு B, AB-க்குக் குத்தாகச் செல்கிறது.

குண்டு A ; AB திசையில் செல்கிறது.

இரண்டு பாதைகளும் ஒன்றற்கொன்று குத்தானவை.

[குறிப்பு: (i) நேரடித் தாக்குதலானால் குண்டு B நின்றுவிடும்; A மட்டும் AB திசையில் போகும்.]

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. M என்ற திணிவு உள்ள ஒரு குண்டு A, ஒரு வழவழப்பான சமதளத்தில் நிலையாக உள்ளது. அதை m என்ற திணிவு உள்ள B எனும் குண்டு சாய்வாகத் தாக்குகிறது. B-ன் வேகம் திசையில் 90° திரும்பினால் $m<eM$ எனக் காண்க. மோதலுக்கு முன்னரும் பின்னரும் உள்ள இயங்கு ஆற்றல் $1 : e$ எனும் விகிதத்தில் உள்ளது எனவும் காண்க.

2. A, B, C என்பவை மூன்று சமத் திணிவும் வடிவமும் உடைய குண்டுகள். வழவழப்பான சமதளத்தில் A-யும் B-யும் நெருங்கியுள்ளன. அவற்றின் பொதுத் தொடுகோட்டிலிருந்து சற்றே சாய்ந்த கோட்டில் C-ஐத் தட்டிவிட அது A-ஐ முதலில் தாக்குகிறது. உடனே B-ஐயும் தாக்குகிறது. $e=\frac{1}{2}$ என்றால் A, B-யின் வேகங்களின் விகிதம் 8 : 5 என நிறுவுக. ($M.U.$ 56 S).

3. சமநிலையில், சமதளத்தில் உள்ள A என்னும் குண்டு மீது B மோதுகிறது. மோதலுக்குப் பிறகு அவற்றின் பாதைகள் ஒன்றற்

கொன்று குத்தாளுல் அவற்றின் திணிவுகளின் விகிதம் $e:1$ அல்லது $1:e$ எனக் காண்க. (*M. U.*)

4. ஒரு வட்டவளையம் ஒரு சமதளத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. வட்டப்பரிதியில் உள்ளிருந்து ஒரு சிறுகுண்டு தட்டிவிடப்படுகிறது. வளையத்தில் இருமுறைபட்டு மீண்டும் புறப்பட்ட இடத்திற்கே அது வந்தால், புறப்பட்ட திசை ஆரத்துடன் $\tan^{-1}\left(\frac{e^3}{1+e+e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ கோணச் சாய்வில் உள்ளதென நிறுவுக. (*M. U.*)

5. A, B என்ற இருகுண்டுகளில் A-யின் திணிவு B-யின் திணிவைப் போல் இருமடங்கு. அவை மோதிக்கொள்ளும்போது அவற்றின் வேகங்களைச் சமமாகவும், ஒன்றற்கொன்று எதிர்த் திசையிலும் பொது மையக் கோட்டுடன் 30° சாய்விலும் உள்ளன. $e=\frac{1}{2}$ என்றால், மோதலுக்குப் பிறகு அவற்றின் வேகங்களையும் திசைகளையும் காண்க.

$$\left(\theta=90°\,;\ v=\frac{u}{2}\,;\ \varphi=30°\ v^2=u\right)$$

8. வட்ட இயக்கம்
(Circular Motion)

8·1. இந்தப் பகுதியில் சீரான வேகத்துடன் ஒரு வட்டத்தில் இயங்கும் துகளின் இயக்கத்தைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

இயக்கத்திற்கான நியூட்டனின் முதல் விதிப்படி, ஒரு நேர் கோட்டில் சீரான வேகத்துடன் சென்றுகொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் புறவிசை ஒன்று செயற்பட்டாலன்றித் தன் திசையையோ, வேகத்தையோ மாற்றுது. ஆகவே வட்டத்தின் மீது இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் துகளின் மீது, அது நேர்கோட்டிலேயே சென்றுகொண்டிராததால், ஒரு விசை செயற்படவேண்டும்.

விசை ஒன்று துகளின் திசையிலேயே செயற்படுமாயின், அதன் வேகத்தை மாற்றும்; ஆனல் திசையை மாற்றுது. ஒரு வளைவுப் பாதையில் செல்லும் துகளின் இயக்கத்திசை எந்தக் கணத்திலும், தொடுகோட்டுத் திசையாகும். எனவே, வட்டத்தில் சீரான வேகத்தில் இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் துகளின் மீது, வேகம் மாறுத காரணத்தால், தொடுகோட்டுத்திசையில், எந்த விசையும் செயற்பட முடியாது. ஆகவே ஒரு துகள் வட்டப்பாதையில், சீரான வேகத்துடன் இயங்குவதற்கு வேண்டிய விசை, துகளின் இயக்கத் திசைக்கு நேர்குத்துத் திசையில்தான் செயற்படவேண்டும் என்பது தெளிவு. இவ்வாறு மையத்தை நோக்கிச் செயற்படும் விசையின் காரணமாக, பொருள் அத்திசையில் ஒரு முடுக்கம் பெறுகிறது. அந்த முடுக்கம் லம்ப முடுக்கம் (normal acceleration) எனப்படும். மையத்தை நோக்கிச் செயற்படும் அவ் விசைக்கு மையநோக்கு விசை (Centripetal-force) எனப் பெயர். இவ் விசை துகளின்மீது செயற்படும் புறவிசைகளால் அளிக்கப்படுகின்றது.

வட்டப்பாதையில் செல்லும்போது, வேகமும் மாறுமேயானல், இயக்கத் திசையான தொடுகோட்டுத் திசையிலும், இயக்கத் திசைக்கு

நேர்குத்துத் திசையிலும் விசை செயற்படும். ஆகவே இவ்விரு திசைகளிலுமே முடுக்கம் இருக்கும்.

8·2. ஒரு வட்டத்தில் இயங்கும் துகளின் தொடுகோட்டு முடுக்கத்திற்கும், லம்ப முடுக்கத்திற்குமான கோவைகள். (Tangential and Normal Acceleration)

படம் 80.

m என்ற திணிவு உடைய ஒரு துகள் O என்ற மையத்தையும், r என்ற ஆரத்தையும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் இயங்குவதாகக் கொள்வோம். வட்டத்தின் மேல் உள்ள A என்ற நிலையான புள்ளியில் இருந்து வட்டவில்லின் நீளத்தை அளக்கிறோம்.

வட்டத்தில் P என்ற புள்ளி ஏதாவது ஒரு கணத்தில் துகளின் நிலையையும், Q மிகக் குறுகிய கால அளவிற்குப் (Δt) பின் அதன் நிலையையும் குறிக்கட்டும். P, Q புள்ளிகளில் துகளின் திசைவேகம் முறையே v, $v+\Delta v$ என இருக்கட்டும். v, PTX என்ற தொடுவரைத் திசையிலும், $v+\Delta v$, TQT_1 என்ற தொடுவரைத் திசையிலும் இருக்கும்.

வில் $AP = s$; வில் $AQ = s+\Delta s$ எனில் $PQ = \Delta s$

$\angle AOP = \theta$; $\angle AOQ = \theta+\Delta\theta$ எனில் $\angle POQ = \Delta\theta$;

$\angle QTX = \Delta\theta$.

v = P-ல் திசைவேகம்

= t-ஐப் பொறுத்த s-ன் மாறுவீதம்

$$\therefore \quad v = \frac{ds}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

Q-ன் திசை வேகத்தை PTX திசையிலும், அதற்குக் குத்தான PO திசையிலும் பிரிப்போமாயின்,

PTX திசையில் :

துகளின் திசைவேக மாறுபாடு $= (v+\triangle v)\cos\triangle\theta - v$

$$\therefore \text{ துகளின் முடுக்கம் } = \underset{\triangle t\to 0}{Lt}\ \frac{(v+\triangle v)\cos\triangle\theta - v}{\triangle t}$$

$$= \underset{\triangle t\to 0}{Lt}\ \frac{(v+\triangle v)-v}{\triangle t}$$

$$[\because \cos\triangle\theta \doteqdot 1]$$

$$= \frac{dv}{dt} \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

PO திசையில் :

துகளின் திசைவேக மாறுபாடு $= (v+\triangle v)\sin\triangle\theta - 0$

$$\therefore \text{ துகளின் முடுக்கம் } = \underset{\triangle t\to 0}{Lt}\ \frac{(v+\triangle v)\sin\triangle\theta}{\triangle t}$$

$$= \underset{\triangle t\to 0}{Lt}\ \frac{(v+\triangle v)\triangle\theta}{\triangle t}\ [\because \sin\triangle\theta \doteqdot \triangle\theta]$$

$$= \underset{\triangle t\to 0}{Lt}\ v\frac{\triangle\theta}{\triangle t}\quad [\triangle v\,.\,\triangle\theta \text{ ஒதுக்கிவிட}]$$

$$= \underset{\triangle t\to 0}{Lt}\ v\frac{\triangle\theta}{\triangle s}\cdot\frac{\triangle s}{\triangle t}$$

$$= \underset{\triangle t\to 0}{Lt}\ v\cdot\frac{\triangle\theta}{r\,.\,\triangle\theta}\cdot\frac{\triangle s}{\triangle t}$$

$$= v\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$= v\cdot\frac{1}{r}\cdot v \text{ (சமன்பாடு)}$$

$$= \frac{v^2}{r} \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

குறிப்பு :

துகள் வட்டத்தில் சீரான வேகம் v-உடன் இயங்கினால், $\frac{dv}{dt}=0$

$\therefore$ தொடுகோட்டு முடுக்கம் $= 0$

லம்ப முடுக்கம் $= \frac{v^2}{r}$

துகளின் கோணவேகம் ω எனில்,

$$v = r\omega \qquad \left[\because \; v = \frac{ds}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{r.\Delta\theta}{\Delta t} = r\frac{d\theta}{dt} \right.$$

$$\therefore \text{ லம்ப முடுக்கம் } = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

எனவே வட்டத்தில் சீரான வேகத்துடன் இயங்கும் துகளின்

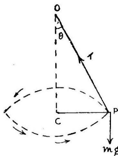
$$\text{லம்ப முடுக்கம் } = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$$\text{மையநோக்கு விசை } = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

8·3. கூம்பு ஊசல் (Conical Pendulum)

ஒரு நிலையான புள்ளியில் இருந்து ஒரு இலேசான, இழுபடாத நூலால் (அல்லது தண்டால்) தொங்கவிடப்பட்ட ஒரு துகள், கிடை தளத்தில் ஒரு வட்டத்தில் இயங்குமாயின், நூல் அந் நிலையான புள்ளி வழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டை அச்சாகக்கொண்ட ஒரு கூம்பை அமைக்கும். இவ்வாறு இயங்கும் துகளும், நூலும் சேர்ந்த அமைப்பு, கூம்பு ஊசல் எனப்படும்.

இங்கு கிடைதளத்தில் வட்டத்தில் இயங்கும் துகள், சீரான வேகத்துடன் இயங்கும்போது அமையும் கூம்பு ஊசலைப் பற்றிக் காண்போம்.



படம் 81.

படத்தில் O நிலையான புள்ளியையும், P துகளையும் குறிக்கின்றன. நூலின் நீளம் l எனவும், நூல் செங்குத்து நிலையோடு அமைக்கும் கோணம் θ எனவும் கொள்வோம். துகளின் நிறை m எனவும், துகள் இயங்கும் வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும், துகளின் கோணவேகம் ω எனவும் கொள்வோம்.

துகளின் மீது செயற்படும் விசைகள் இரண்டு மட்டுமே :

1. PO வழியே செயற்படும், கயிற்றின் இழுவிசை T
2. செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் துகளின் எடை mg

செங்குத்துத் திசையில் துகள் எவ்வித இயக்கமும் பெறவில்லை.

$$\therefore \quad T\cos\theta = mg \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இழுவிசையின் கிடைக்கூறு, துகள் வட்டத்தில் சீராக இயங்க வேண்டிய மையநோக்கு விசையை அளிக்கிறது (mrw^2)

$$\therefore \quad T\sin\theta = mrw^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$= m(l\sin\theta)w^2$$

$$\therefore \quad T\sin\theta - mlw^2\sin\theta = 0$$

$$(T - mlw^2)\sin\theta = 0$$

$$\therefore \quad \sin\theta = 0 \text{ அல்லது } T = mlw^2$$

$\sin\theta = 0$ எனில், $\theta = 0$; துகள் நூலின் முனையில் நேர்கீழே இருக்கின்றது. இந்த நிலையில் வட்டத்தில் இயக்கம் இல்லை. ஆகவே $\theta \neq 0$ எனில்,

$$T = mlw^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots (3)$$

இதை (1)-ல் பிரதியீடு செய்ய

$$\boxed{\cos\theta = \frac{g}{lw^2}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots (4)$$

இந்தச் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோண வேகத்துடன் சுழலும் கூம்பு ஊசலின், செங்குத்து நிலையோடு நூல் அமைக்கும், கோணத்தை தருகின்றது.

மேலும், $\cos\theta \leq 1$

ஆகவே துகள் வட்டத்தில் இயங்க வேண்டுமெனில், $\theta \neq 0$

எனவே,

$$\cos\theta < 1$$

$$\therefore \quad g < lw^2$$

அல்லது

$$\boxed{w^2 > \frac{g}{l}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots (5)$$

இதில் இருந்து துகள் l நீளமுள்ள நூலோடு கூம்பு ஊசல் அமைக்க, அதன் கோண வேகம் w, $\sqrt{\frac{g}{l}}$ விட அதிகமாக இருக்க வேண்டும் என அறிகிறோம்.

இனி, O-ல் இருந்து துகளின் ஆழம் h எனில்,

$$ON = h = l\cos\theta = \frac{g}{w^2}$$

$$\therefore\ w^2 = \frac{g}{h}$$

$$\boxed{\therefore\ w = \sqrt{\frac{g}{h}}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots(6)$$

இந்தச் சமன்பாட்டிலிருந்து ஊசலின் கோண வேகம் துகளின் ஆழத்தின் வர்க்க மூலத்திற்கு எதிர் விகிதத்தில் இருக்கிறது. அது நூலின் நீளத்தைச் சார்ந்திருப்பதில்லை என்று காண்கிறோம்.

அல்லது

தொங்கு தானத்தில் இருந்து துகளின் ஆழம், நூலின் நீளத்தைச் சார்ந்திராமல், கோண வேகத்தின் இரு மடிக்கு எதிர் விகிதத்தில் இருக்கிறது என்று கூறலாம்.

சமன்பாடு (6)-ல் இருந்து, ஊசல் ஒரு முறை சுற்றி வர ஆகும் காலம் T எனில்,

சுழற்சி நேரம் $T = \frac{2\pi}{w}$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots(7)$$

துகள் வட்டத்தை விநாடிக்கு n முறை சுற்றி வந்தால்,

$$w = 2\pi n$$

சமன்பாடு (3)-ல் இருந்து

$$\boxed{T = 4\pi^2 n^2 ml} \quad \dots \quad \dots \quad \dots(8)$$

குறிப்பு :

1. ஊசலின் நீளம் l கொடுக்கப்பட்ட அளவுள்ளதால், w-ன் மதிப்புக் கந்தழியை அடைந்தால் மட்டுமே, θ-ன் மதிப்பு 90° ஆக முடியும். (சமன்பாடு 4-ஐப் பார்க்க). ஆகவே துகள் O வழியே செல்லும் கிடை மட்டத்தில் வட்டப் பாதையில் சுழலுவதென்பது இயலாதது.

2. துகளின் திசை வேகம் $v = rw$

$$\therefore \quad v^2 = r^2w^2$$

$$= (l^2 \sin^2 \theta) \frac{g}{l \cos \theta}$$

$$v^2 = gl \sin \theta . \tan \theta$$

3. கூம்பு ஊசலில் அமையும் துகள், வழவழப்பான கிடைதள மேசையில் வட்டப் பாதையில் இயங்குமானால், சமன்பாடு (1) $T \cos \theta + R = mg$ ஆகும்.

இதில் R என்பது, துகளின் மீது செயற்படும் எதிர்விசை.

$$\therefore \quad R = mg - T \cos \theta$$

$$= mg - mlw^2 \frac{h}{l}$$

$$R = mg - mhw^2$$

ஆகவே, துகள் மேசை மீதே சுற்ற வேண்டுமெனில்,

$$R > 0$$

$$\therefore \quad g > hw^2$$

$$w < \sqrt{\frac{g}{h}}$$

அதாவது $n < \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (\because \quad w = 2\pi n)$

8·4. நீராவி இயந்திரங்களின் வேகம் காக்கும் அமைப்பு (Governors of steam-engines)

ஒரு துகள், கூம்பு ஊசல் அமைப்பில் சுழலும்போது, தொங்கு தானத்தில் இருந்து துகளின் ஆழம், அதன் கோண வேகத்தை மட்டுமே சார்ந்தது என்ற கருத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு, ஒரு நீராவி யந்திரத்தில், நீராவியின் அளவைக் கட்டுப்படுத்தும் இந்தக் கருவி அமைக்கப்படுகிறது.

S என்பது நீராவி யந்திரத்தால் சுழற்றப்படும் ஊடச்சு முனை (shaft). இதனுடன் CA, CB என்ற இரு உலோகச் சட்டங்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவைகளின் மறு முனைகளில் A, B என்ற இரு எடைகள் உள்ளன. ஊடச்சு முனையின் சுழற்சியால், உலோகச் சட்டங்கள் இரண்டும் சுழலுவதால், A, B என்ற இந்த இரு எடைகளும்

படம் 82.

சுழன்று வருகின்றன. [இவ்வாறு அமைந்த நீராவி எந்திரத்தின் வேகம் காக்கும் அமைவுதனை ஓர் இரட்டைக் கூம்பு ஊசலாகக் கருதலாம்.] இவ்விரு உலோகச் சட்டங்களும் DF, EF என்ற மற்றுமிரு உலோகச் சட்டங்களால், F என்ற ஒரு நழுவு வளையத்துடன் (collar) இணைக்கப் பட்டுள்ளன. இந்த நழுவு வளையம், S என்ற ஊடச்சு முனையில் மேலும் கீழும் செல்லத்தக்கவாறு அமைக்கப்படுகிறது. F என்ற இந்த நழுவு வளையத்துடன் ஒரு நெம்புகோல் அமைப்பு இணைக்கப்படுகிறது. இந்த நெம்புகோல் அமைப்பு, வளையம் மேலே செல்லும்போது, யந்திரத்திற்கு நீராவி செல்லும் பாதையைச் சற்று மூடி நீராவியின் போக்கைக் கட்டுப்படுத்துமாறும், வளையம் கீழே இறங்கும்போது நீராவியின் பாதை திறந்து நீராவியின் போக்கு அதிகரிக்குமாறும் அமைக்கப்படுகிறது.

கூம்பு ஊசலின் நீளம் l எனவும், கோணவேகம் ω எனவும் கொண்டால்,

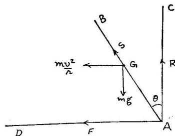
$$\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2} \quad \text{[சமன்பாடு 4]}$$

யந்திரத்தின் வேகம் அதிகமாகும்போது, ஊடச்சு முனையின் சுழல் வேகமும் அதிகமாகின்றது. ஆகவே A, B இவற்றின் கோணவேகமும் (ω) அதிகரிக்கின்றது. ஆகவே $\cos\theta$-ன் மதிப்பு குறைகின்றது. θ-ன் மதிப்பு அதிகமாகின்றது. எனவே CA, CB மேலே உயர்கின்றன. இதனால் ஊடச்சு முனையின் மேல் நகரும் F, மேலே செல்லுகிறது.

இதனால், இதனுடன் இணைக்கப்பட்ட நெம்புகோல் அமைப்பு இயந்திரத்திற்கு நீராவி செல்லும் பாதையை மூடச் செய்யும். ஆகவே நீராவியின் போக்குக் குறைந்து, வேகம் மட்டுப்படுத்தப்படுகிறது. இவ்வாறு இயந்திரத்தின் வேகம் அதிகமாகும்போது வேகம் கட்டுப்படுத்தப்பட்டு ஒரு சமநிலைக்கு வருகின்றது.

இவ்வாறே, வேகம் குறையும்போது, ω-ன் மதிப்பு குறைகிறது. ஆகவே $\cos\theta$-ன் மதிப்புக் கூடுகின்றது. θ-ன் மதிப்புக் குறைகின்றது. எனவே CA, CB கீழ்நோக்கிச் செல்கின்றன. இவற்றுடன் F-ம் கீழ் நோக்கிச் செல்வதால், நீராவியின் பாதை திறக்கப்பட்டு நீராவியின் போக்கு அதிகமாகின்றது. மறுபடியும் வேகம் அச் சமநிலைக்கு வரும் வரையில் நீராவி இவ்வாறு அதிகமாகச் செலுத்தப்படுகிறது. இம் முறையில் இயந்திரத்தின் வேகம் தானாகவே கட்டுப்படுத்தப் படுகின்றது.

8·5. வட்டப்பாதை வழியே சைக்கிளில் செல்பவரின் இயக்கம்



படம் 83.

ஒரு வட்டப்பாதையில் சைக்கிளில் செல்லும்போது நம்மையு மறியாமல் வட்டப்பாதையின் மையத்தை நோக்கிச் சிறிது சாய்ந்த நிலையில் செல்கிறோம். இதனால் தரையின் விசை, செங்குத்து திசைக்கு சரிந்த திசையில் செயல்படுகிறது. இந்த விசையின் கிடைதளக் கூறுன தரையின் உராய்வு விசை (Frictional force) வட்டப்பாதையில் செல்ல அவசியமான மையநோக்கு விசையை அளிக்கின்றது.

படத்தில் AB சைக்கிளையும், அதன்மீது செல்பவரையும் குறிக்கின்றது. அவர்களின் திணிவு m என்போம். G அவர்களின் புவிசர்ப்பு மையத்தைக் குறிக்கின்றது. சக்கரம் A எனுமிடத்தில் தரையைத் தொடுகிறது.

AC, A வழியே செல்லும் செங்குத்துக்கோடு
AD, A வழியே செல்லும் கிடைகோடு
$\angle BAC = \theta$ எனக் கொள்வோம்.

சைக்கிள், அதன்மீது செல்பவர்மீது செயற்படும் விசைகள்

(i) செங்குத்தாக G வழியே கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் எடை mg

(ii) உட்புறமாக AD வழி செயற்படும் தரையின் உராய்வு விசை F

(iii) செங்குத்துத் திசையில் (AC) செயற்படும் தரையின் எதிர் விசை R.

G வட்டப்பாதையில் செல்கிறது. mg, G வழியே செயல்படுகிறது. எனவே R, F இவற்றின் தொகுபயனை தரையின் மொத்த விசை S, G வழியே செயல்படும்.

வட்டப்பாதையின் ஆரம் r எனவும், பாதையில் சைக்கிளில் செல்பவர் v எனும் சீரான வேகத்துடனும் செல்வதாகக் கொண்டால்,

$$R = S \cos \theta = mg \qquad \text{.........(1)}$$

$$F = S \sin \theta = \frac{mv^2}{r} \qquad \text{.........(2)}$$

எனவே,

$$\boxed{\tan \theta = \frac{v^2}{rg}} \qquad \text{.........(3)}$$

இதிலிருந்து கொடுத்துள்ள ஆரமுடைய ஒரு வட்டப்பாதையில், ஒரு குறிப்பிட்ட வேகத்தில், கீழே விழாமல் செல்ல, செங்குத்து நிலையுடன் எந்த அளவு சாயவேண்டியிருக்கும் என்பதைக் கணக்கிடலாம்.

மேலும், v-ன் மதிப்பு அதிகமானுலோ அல்லது r-ன் மதிப்புக் குறைந்தாலோ $\tan \theta$-ன் மதிப்பு அதிகமாகின்றது. எனவே θ, அதாவது, செங்குத்து நிலையுடன் சாயவேண்டியிருக்கும் கோணம் அதிகமாகின்றது. எனவே, ஒரு வளைவுப்பாதையில் அதிக வேகமாகச் சென்ருலோ அல்லது மிகச் சிறிய ஆரமுடைய ஒரு வளைவில் செல்ல நினைத்தாலோ, கீழே விழுந்துவிட நேரிடும்.

குறிப்பு :

$$R = mg \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

$$F = \frac{mv^2}{r} \qquad \ldots\ldots\ldots(5)$$

(5)-ல் இருந்து, ஒரு குறிப்பிட்ட வளைவுப் பாதையில் சைக்கிளில் செல்லும் ஒருவரின் வேகம் அதிகமாகும்போது, உராய்வு விசையும் அதிகமாகின்றது, எனக் காண்கிறோம். உராய்வு எண் μ எனில், F பெறக்கூடிய அதிகபட்ச மதிப்பு, எல்லை உராய்வு விசையான μR ஆகும்.

$$\therefore\ F \leqslant \mu R$$

$$\frac{mv^2}{r} \leqslant \mu mg$$

$$\boxed{\therefore\ v^2 \leqslant \mu gr} \qquad \ldots\ldots\ldots(6)$$

எனவே r ஆரமும், உராய்வு எண் μ-ம் ஆன ஒரு வட்டப் பாதையில் செல்லக்கூடிய உச்ச வேகம் $= \sqrt{\mu gr}$. எனவே கொடுக்கப்பட்ட வளைவுப்பாதையில், சைக்கிள் நழுவா வண்ணம் செல்லவேண்டுமாயின் வேகம், $\sqrt{\mu gr}$-க்கு மேல் இருக்கக்கூடாது,

மேலும்,

$$\boxed{r \geqslant \frac{v^2}{\mu g}} \qquad \ldots\ldots\ldots(7)$$

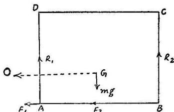
ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட வேகத்துடன் செல்லக்கூடிய வட்டப் பாதையின் குறைந்தபட்ச ஆரம் $= \frac{v^2}{g\mu}$; அதாவது v அதிகமானாலோ அல்லது உராய்வு எண் சிறியதாக இருந்தாலோ, வட்டப்பாதையின் ஆரம் பெரியதாக இருத்தல் வேண்டும்.

8·6. சமதளத்தில் அமைந்த வட்டப்பாதையில் இரயில் பெட்டியின் இயக்கம்

சமதளத்தில் அமைந்த, r ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில், v எனும் சீரான வேகத்துடன் ஓர் இரயில் பெட்டி செல்வதற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசையை $\left(\frac{mv^2}{r}\right)$, தண்டவாளங்களுக்கும், சக்கரங்களுக்கும் இடையே உள்ள அழுத்தம் அளிக்கின்றது.

[வெளிச்சக்கரத்தின்மீது தண்டவாளம் செயற்படுத்தும் அமுத்தமும், உட்சக்கரம் தண்டவாளத்தின்மீது செயற்படுத்தும் அமுத்தமும், வட்டப்பாதையில் பெட்டி செல்வதற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசையை அளிக்கின்றன.

ஒரு வட்டப்பாதையில் செல்லும் மோட்டார்கார் ஒன்றுக்கும் இதே போன்ற இயக்கம் சாரும். தண்டவாளங்களுக்கும், சக்கரங்களுக்கும் இடையே உள்ள அமுத்தத்துக்குப் பதிலாக, காருக்கும் பாதைக்கும் இடையே உள்ள உராய்வு விசை, தேவையான மையநோக்கு விசையை அளிக்கின்றது.]



படம் 84.

படத்தில் $ABCD$, பெட்டியின் புவிஈர்ப்பு மையம் (G), வட்டப் பாதையின் மையம் (O) ஆகியவற்றின் வழியே செல்லும் செங்குத்துத் தளவெட்டு முகத்தைக் குறிக்கிறது. A-ம், B-ம் சக்கரங்கள் தண்டவாளங்களைத் தொடும் புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன. A பாதையின் உட்புறத்தில் அமைந்துள்ளது.

AB = தண்டவாளங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $=2a$ என்போம்.

R_1, R_2 செங்குத்துத் திசையில், தண்டவாளங்கள் செயற்படுத்தும் எதிர்விசைகளையும், F_1, F_2 தண்டவாளங்களுக்கும், சக்கரங்களுக்கும் இடையே உட்புறமாகச் செயற்படும் அமுத்தத்தையும் குறிக்கின்றன. மற்றொரு வெளி விசையான பெட்டியின் எடை mg, செங்குத்துத் திசையில் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும். $F_1+F_2=F$ என்போம். F, BA வழிச் செயற்படுகிறது.

செங்குத்து திசையிலும், கிடைமட்டத்திலும் இயக்கச் சமன்பாடுகள், எழுத

$$R_1 + R_2 = mg \qquad \text{......(1)}$$

$$F = F_1 + F_2 = \frac{mv^2}{r} \qquad \text{......(2)}$$

Gஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்,

$$R_2 a - R_1 a - Fh = 0 \qquad \text{......(3)}$$

[h = பெட்டியின் புவிஈர்ப்பு மையத்தின் உயரம்]

$$\therefore \quad R_2 - R_1 = \frac{Fh}{a}$$

$$R_2 - R_1 = \frac{mv^2}{r} \cdot \frac{h}{a}$$

$$R_2 + R_1 = mg$$

எனவே,

$$R_2 = \frac{1}{2}\left[mg + \frac{mv^2h}{ra}\right]$$

$$R_2 = \frac{m}{2}\left[g + \frac{v^2h}{ra}\right] \qquad \text{......(4)}$$

$$R_1 = \frac{m}{2}\left[g - \frac{v^2h}{ra}\right] \qquad \text{......(5)}$$

இந்தச் சமன்பாடுகளில் இருந்து நாம் இயக்கத்தைப்பற்றி அறிகிறோம்.

குறிப்பு : வட்டப்பாதையில் செல்வதற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசை C வழியே செயல்படவேண்டும். ஆனால், தண்டவாளங்களுக்கும் சக்கரங்களுக்கும் இடையே உள்ள கிடைதள விசை F, BA வழியே செயல்படுகிறது. இவ்விசை C வழியே செயற்படும் ஒரு சமமான விசைக்கும், $ADCB$ என்ற திசையில் இயங்கக்கூடிய ஒரு சுழலிணைக்கும் சமம். இச் சுழலிணை உட்சக்கரத்தை (A எனும் புள்ளியை) தண்டவாளத்திலிருந்து தூக்கிவிடும் வாய்ப்பைப் பெற்றிருக்கிறது.

சமதளத்தில் அமைந்த வட்டப்பாதையில் இயங்கும் இரயில் பெட்டி கவிழக்கூடிய நிலை :

சமன்பாடு (4)-ல் இருந்து,

R_2 எப்போதும் நேர் எண்ணுகவே இருக்கும், v-ன் மதிப்பு கூடக் கூட R_2-ன் மதிப்பும் கூடும் என்று காண்கிறோம்.

R_2 எப்போதும் நேர் எண் ஆனதால், இச் சக்கரம் (வெளிச்சக்கரம்) பாதையைவிட்டு விலக வாய்ப்பே இல்லை.

சமன்பாடு (5)-ல் இருந்து,

v-ன் மதிப்பு கூடக்கூட R_1-ன் மதிப்புக் குறைவதைக் காண்கிறோம்.

$$v^2 = \frac{gra}{h} \quad \text{எனில்} \quad R_1 = 0$$

எனவே,

$v = \sqrt{\frac{gra}{h}}$ எனில், உட்சக்கரம் தண்டவாளத்துடன் தொடர்பை இழந்துவிடுகிறது.

$$v > \sqrt{\frac{gra}{h}} \quad \text{எனில்} \quad \left[\frac{v^2 h}{ra} > g\right]$$

R_1 எதிர் எண்ணுகிறது. ஆகவே, உட்சக்கரத்திற்கும் தண்டவாளத்திற்கும் தொடர்பு இல்லாமல் போகின்றது. ஆகவே, இரயில் பெட்டி (வெளிச்சக்கரம், தண்டவாளத்தின்மேல் படியுமாறு) வெளிப்புறமாகக் கவிழும் நிலையை அடைகிறது.

இரயில் பெட்டி செல்லும் வேகம் v அதிகமாக இருக்கவேண்டுமானல், a பெரியதாகவும், h சிறியதாகவும் இருக்கவேண்டும். ஆகவே, இரயில் பெட்டி வளைவில் வேகமாகச் செல்ல ஏற்றவாறு, புவிஈர்ப்பு மையத்தைக் கூடியவரை கீழேயும், தண்டவாளங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தை கூடியவரை அதிகமாகவும் அமைக்கவேண்டும்.

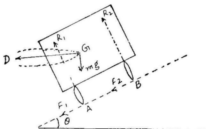
இவ்வாறு இரயில் பெட்டியையும் செய்து, தண்டவாளங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தையும் நிர்ணயம் செய்த பிறகு, வேகத்தை அதிகரிக்க, கூடியவரை பெரிய ஆரமுள்ள பாதையை அமைக்க வேண்டும்.

இரயில் பெட்டியையும் கட்டி, பாதையையும் அமைத்த பிறகு, இரயில் கவிழாமல் அவ் வளைவுப் பாதையில் செல்ல, வேகத்தை $\sqrt{\frac{gra}{h}}$ என்ற அளவைவிடக் குறைத்தே ஓட்டவேண்டும்.

8·7. ஒரு பக்கம் உயரமாக அமைக்கப்பட்ட வட்டப்பாதை வழியே இரயில் பெட்டியின் இயக்கம் (Banked-up track)

ஓர் இரயில் பெட்டி சமதளத்தில் அமைக்கப்பட்ட வட்டப்பாதையில் செல்வதற்குத் தேவையான மையநோக்குவிசை, தண்டவாளங்கள்மீது சக்கர விளிம்புகள் செயற்படுத்தும் அழுத்தம் ஆகும். நியூட்டனின் மூன்றுவது விதிப்படி சக்கர விளிம்புகள் தண்டவாளத்தை அழுத்தும் பொழுது, தண்டவாளமும் அதே விசையுடன் சக்கர விளிம்புகளை அழுத்துகின்றது. இதனுல் இரண்டுக்கும் இடையில் மிக அதிகமாக உராய்வு விசை செயற்பட்டு நாளடைவில் சக்கரங்களும், தண்டவாளங்

களும் சேதம் அடைந்துவிடுகின்றன. இதைத் தவிர்ப்பதற்காக இருப்புப் பாதையின் குறுக்குக் கட்டைகளை (sleepers) கிடைதளத்திற்குச் சற்றுச் சாய்ந்திருக்குமாறு அமைக்கிறார்கள். இவ்வாறு அமைப்ப தன் மூலம், சக்கர விளிம்புகள் தண்டவாளங்களின்மீது எவ்வித அழுத் தத்தையும் செயற்படுத்தாதவாறு செய்யலாம். இவ்வாறு குறுக்குக் கட்டைகளை அமைப்பதற்குத் தேவையான சாய்வு கோணத்தைப் பின் வருமாறு கணக்கிடலாம்.



படம் 85.

படத்தில் $ABCD$, பெட்டியின் புவியீர்ப்பு மையம் (G), வட்டப் பாதையின் மையம் (D) ஆகியவற்றின் வழியே செல்லும் செங்குத்துத் தளவெட்டு முகத்தைக் குறிக்கின்றது.

A, B என்ற புள்ளிகள் பெட்டியின் உட்புற வெளிப்புறச் சக்கரங் கள் தண்டவாளத்தைத் தொடும் இடங்களைக் குறிக்கின்றன.

R_1, R_2 உட்புற வெளிப்புறத் தண்டவாளங்கள் பெட்டியின் அடித் தளத்திற்குச் (AB) செங்குத்தாகச் செயற்படுத்தும் எதிர்விசைகள்.

பெட்டியின் திணிவு m எனவும், பெட்டியின் சீரான வேகம் v எனவும், பாதையின் ஆரம் r எனவும், புவிஈர்ப்பு மையம் G, இருப்புப் பாதையின் தளத்தில் இருந்து h உயரத்தில் இருக்கின்றது எனவும் கொள்வோம்.

தண்டவாளங்களுக்கும், சக்கரங்களுக்கும் இடையே அழுத்தமே இல்லாமல் இருக்கத் தேவையான சாய்வு கோணம் θ என்போம்.

கிடைமட்டத்திலும், செங்குத்துத் திசையிலும் இயக்கச் சமன்பாடு களை எழுத,

$$(R_1+R_2)\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$(R_1+R_2)\cos\theta = mg \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

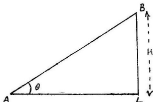
(2) ÷ (1),

$$\boxed{\tan\theta = \frac{v^2}{rg}} \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

எனவே, r ஆரமுடைய வட்டப்பாதையின் வழியே, பெட்டி v வேகத்துடன் இயங்கும்போது, தண்டவாளங்கள்மீது சக்கர விளிம்புகள் எவ்வித அழுத்தத்தையும் செயற்படுத்தாமல் இருக்க, குறுக்குக் கட்டைகளைக் கிடைதளத்திற்கு $\tan^{-1}\frac{v^2}{rg}$ 'என்ற கோணத்தை அமைக்குமாறு பொருத்த வேண்டும்.

குறிப்பு :

1. இரு தண்டவாளங்களுக்கும் இடையே நிர்ணயிக்கப்பட்ட தூரம் AB கொடுக்கப்பட்டால், உட்புறத் தண்டவாளத்திலிருந்து, வெளிப்புறத் தண்டவாளம் இருக்கவேண்டிய உயரம் Hஐக் கணக்கிடலாம்.



படம் 86.

$$BL = AB.\sin\theta \quad \left(\begin{array}{l}\text{பொதுவாக } \theta \text{ சிறியது} \\ \text{ஆதலால், } \sin\theta \simeq \theta = \tan\theta\end{array}\right)$$
$$= AB.\tan\theta$$
$$= AB.\frac{v^2}{rg}$$

$$\therefore\ H = AB.\frac{v^2}{rg} \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

2. இவ்வாறு கணக்கிடப்பட்டுச் சரிவாக அமைக்கப்பட்ட பாதையின், r, θ இவற்றின் மதிப்பு நிலையுள்ளவை ஆகும். இப்போது தண்டவாளங்களுக்கும், சக்கரங்களுக்கும் இடையே அழுத்தமே இல்லாதவாறு செல்லவேண்டிய திட்டமிடப்பட்ட வேகம்,

$$V = \sqrt{gr \tan\theta} \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

3. திட்டமிடப்பட்ட வேகத்தைவிடக் குறைவான அல்லது அதிகமான வேகத்தோடு அப் பாதையில் சென்றால், சக்கரங்களுக்கும், தண்டவாளங்களுக்கும் இடையே ஓரளவு அழுத்தம் ஏற்படவே செய்யும். BA-ன் திசையில் இவ் வழுத்தத்தின் அளவு F எனக் கொண்டால், F-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடமுடியும்.

அழுத்தம் இல்லாமல் இப் பாதையில் செல்ல திட்டமிடப்பட்ட வேகம் V.

v என்ற மாறுபட்ட வேகத்துடன் செல்லும்போது, ஏற்படும் அழுத்தம் F என்க.

$$\tan\theta = \frac{V^2}{rg} \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

செங்குத்துத் திசையிலும், கிடைமட்டத்திலும், இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுத,

$$(R_1+R_2)\cos\theta - F\sin\theta = mg \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

$$(R_1+R_2)\sin\theta + F\cos\theta = \frac{mv^2}{r} \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

$(8) . \cos\theta - (7) . \sin\theta$

$$F = \frac{mv^2}{r}\cos\theta - mg\sin\theta$$

$$= \frac{m\cos\theta}{r}\ [v^2 - gr\tan\theta]$$

$$F = \frac{m\cos\theta}{r}\ [v^2 - V^2] \quad \dots \quad \dots \quad (9)$$

$$= \frac{m}{r}\ \frac{(v^2 - V^2)}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$= \frac{m}{r} \cdot \frac{v^2 - V^2}{\sqrt{1 + \frac{V^4}{r^2 g^2}}}$$

$$= mg \frac{(v^2 - V^2)}{\sqrt{V^4 + g^2 r^2}}$$

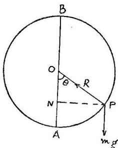
எனவே $v > V$ எனில், அதாவது உண்மையான வேகம், திட்டமிடப் பட்ட வேகத்தைவிட அதிகம் என்றால், F நேரெண்ணுகும். ஆகவே, வெளித் தண்டவாளம் சக்கர விளிம்புகளை அழுத்துகின்றது.

$v < V$ எனில், வேகம் திட்டமிடப்பட்ட வேகத்தைவிடக் குறைவு எனில், F-ன் மதிப்பு எதிர் எண்ணுகும். ஆகவே F, AB-ன் திசையில் செயல்படும். ஆகவே உட்தண்டவாளத்துக்கும் சக்கர விளிம்புகளுக்கும் இடையே அழுத்தம் இருக்கும்.

சாய்வாக அமைக்கப்பட்ட பாதையில் செல்லும் மோட்டார் கார்களுக்கும் மேற்கூறியவை பொருந்தும். இந்த இயக்கத்தில், அழுத்தம் F-க்குப் பதிலாக, பாதைக்கும் சக்கரத்திற்கும் இடையே, உராய்வு விசை செயற்படும்.

8·8. சுழலும் கம்பியில் ஒரு துகளின் சார்பமைதி (Relative rest)

வட்டவடிவமான வழவழப் பான கம்பி ஒன்றில் ஓர் உருமணி (bead) கோக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். இக் கம்பி அதன் தளத்தில் உள்ள ஒரு செங்குத் தான அச்சைப்பற்றிச் சீரான கோண வேகத்துடன் சுழற்றப் பட்டால், சுழற்றப்படும் வேகத் தைப் பொறுத்து உருமணி கம்பி யின் தாழ்ந்த புள்ளியைத் தவிர, வேறு புள்ளிகளிலும் கம்பியைப் பொறுத்தவரை ஓய்வில் இருக்கும் என நிறுவலாம்.



படம் 87.

படத்தில் O வட்டமையத்தை யும், AB என்ற விட்டம் செங் குத்து அச்சையும் குறிக்கின்றன.

ஆரம் $OP = a$ எனவும்
சுழல்வேகம் $= \omega$ எனவும்
உருமணியின் திணிவு $= m$ எனவும்
கொள்வோம்.

P எனும் புள்ளி, உருமணி கம்பியைப் பொறுத்தவரை ஓய்வில் இருக்கும் ஒரு நிலையைக் குறிக்கட்டும். $\angle POA = \theta$ என்போம்.

PN என்ற கோடு AB-க்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டுளளது. கம்பி சுழற்றப்படும்போது, உருமணி கம்பியின்மேல் இருந்துகொண்டு, கிடைதளத்தில் Nஐ மையமாகக்கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் இயங்கும். இந்த இயக்கத்திற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசை ($m.\ PN.\ w^2$), PN வழியே செயற்படுகிறது.

உருமணியின் மேல் செயற்படும் விசைகள் :

(i) உருமணியின் எடை mg ; இது செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகிறது.

(ii) உருமணி கம்பியின்மேல் இருப்பதால், கம்பிதாக்கும் நேர் குத்து எதிர்விசை ; இது PO வழியே செயற்படுகிறது.

இந்த நேர்குத்து எதிர்விசையின் நிலைக்கூறுன $R \cos \theta$ உருமணியின் எடையைச் சரியீடு செய்கிறது. கிடைகூறுன $R \sin \theta$ மைய நோக்கு விசையை அளிக்கிறது.

எனவே, உருமணி கம்பியைச் சார்ந்து ஓய்வில் இருக்க,

$$R \cos \theta = mg \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$R \sin \theta = mw^2 PN = mw^2\, a \sin \theta \qquad \ldots\ldots(2)$$

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து,

$$\sin \theta\, (R - mw^2 a) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = 0$$

$$\text{அல்லது } R - maw^2 = 0$$

(i) $\sin \theta = 0$ எனில், $\theta = 0$ அல்லது π ஆக இருக்க வேண்டும்.

$\theta = 0$ எனில், கம்பியின் தாழ்ந்த புள்ளியான A, உருமணியின் சார்பமைதி நிலையாகும். இங்கு $R = mg$.

$\theta = \pi$ எனில், கம்பியின் உச்சப் புள்ளியான B, உருமணியின் சார்பமைதி நிலையாகும். இங்கு $R = -mg$.

இவ்விரண்டு நிலைகளிலும் எதிர்விசை முழுவதும், உருமணியின் எடையைச் சரியீடு செய்கிறது.

(ii) $\sin \theta \neq 0$ எனில்,

$$R - maw^2 = 0$$

$$R = maw^2$$

சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து

$$m a \omega^2 \cos \theta = m g$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{g}{a \omega^2} \quad \ldots\ldots(3)$$

θ-ன் இந்த மதிப்பு, சாய்வாக அமைந்த ஒரு சார்பமைதி நிலையின் சாய்வுக் கோணத்தைக் கொடுக்கின்றது.

θ-ன் இம் மதிப்பு, மெய்யாக இருக்கவேண்டுமெனில்,

$$\cos \theta < 1$$

$$\frac{g}{a \omega^2} < 1$$

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{a}} \quad \ldots\ldots(4)$$

எனவே, $\omega > \sqrt{\frac{g}{a}}$ எனில் மட்டுமே, இப்படிப்பட்ட சாய்வாக அமைந்த புள்ளி, சார்பமைதி நிலையாக அமையமுடியும்.

இவ்வாறாக, உருமணி தாழ்ந்த புள்ளியிலோ, உச்சிப்புள்ளியிலோ, அல்லது தாழ்ந்த புள்ளியில் இருந்து $\cos^{-1}\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$ கோணத் தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலோ, கம்பியைப் பொறுத்தவரை ஓய்வில் இருக்கும். ஆனால், கடைசியில் குறிப்பிட்ட புள்ளியில் அமைய வேண்டுமானால் அதன் சுழல்வேகம் ω, $\sqrt{\frac{g}{a}}$ஐ விட அதிகமாக இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது, சுழல்வேகம் $\sqrt{\frac{g}{a}}$-ஐ விட அதிகமாக இல்லாமல் இருந்தால், உருமணி A, B தவிர, Pஐப் போன்ற வேறெந்த (சாய்ந்த) நிலையிலும் சார்பு அமைதியில் இருக்காது.

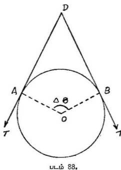
குறிப்பு :

(i) கம்பியின் தாழ்ந்த புள்ளியான A-ல் உருமணி நிலைச்சம நிலையிலும், (Stable equilibrium), உச்சிப்புள்ளியான B-ல் நிலையிலாச் சமநிலையிலும் இருக்கும்.

(ii) வட்ட வளேவான, வழவழப்பான சுழலும் குழாய் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்ட உருமணி ஒன்றின் சார்பமைதி நிலேக்கும், சுழலும் வழவழப்பான கோளம் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்டு அதனுடன் சுழலும் துகளின் சார்பமைதி நிலேக்கும் மேற்கூறிய நிபந்தனேகள் பொருந்தும்.

8·9. சுழலும் கம்பியின் இழுவிசை

ஒரு வட்டவடிவக் கம்பி (அல்லது தோல்பட்டை), அதன் தளத்திலேயே, மையத்தின் வழியே தளத்திற்குச் செங்குத்தாக செல்லும் அச்சைப்பற்றிச் சுழற்றப்படுமாயின், கம்பியில் ஓர் இழுவிசை உண்டாகும். அதைக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடலாம்.



படம் 88.

[வட்டக்கம்பி கிடைதளத்தில் அமைவதாகக் கொள்வோம். அப்போது அதன் எடையைக் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளத் தேவையில்லே.]

மையப்புள்ளி O என்க.

வட்டவடிவக் கம்பியின் AB என்ற ஒரு சிறு பகுதியைக் கருதுவோம்.

AB என்ற வட்டவில்லின் நீளம் Δs என்போம்.

AB வட்ட மையத்தில் அமைக்கும் கோணம் $\Delta\theta$ என்போம்.

வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும், சுழல்வேகம் ω எனவும், ஓர் அலகு நீளக்கம்பியின் திணிவு m எனவும் இருக்கட்டும்.

AB-ன் திணிவு $= m.\ \Delta s = m\,r.\Delta\theta$

கம்பியின் இப்பகுதியும் ω எனும் சுழல்வேகத்துடன் இயங்குவதால், அத்தகைய இயக்கத்திற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசை $= (mr.\ \Delta\theta)\, r\omega^2 = mr^2\omega^2\Delta\theta$ ஆகும்.

இந்த விசையை A, B ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட DA, DB என்ற தொடுகோடுகள் வழியே செயற்படும் இழுவிசைகள் கொடுக்கின்றன. இவ்விழுவிசைகள் ஒவ்வொன்றும் T என்போம். அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் $180 - \Delta\theta$.

DO இக்கோணத்தின் சமவெட்டி.

ஆகவே DO வழியே இவ் விழு விசைகளின்

$$\text{தொகுபயன்} = 2T\cos\left(90-\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

$$= 2T\sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

$$= 2T\frac{\Delta\theta}{2} \quad [\because \Delta\theta \text{ சிறிய மதிப்புடையது}]$$

$$= T\,.\,\Delta\theta$$

ஆகவே,

$$T\,\Delta\theta = mr^2w^2\,\Delta\theta$$

$$\therefore\ T = mr^2w^2$$

கம்பியின்மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியில் வேகம் (திசைவேகம்) v எனில்

$$v = rw$$

$$\therefore\ T = mv^2$$

கம்பி தாங்கக்கூடிய உச்ச இழுவிசை T_M எனில், கம்பி பெறக் கூடிய அதிகபட்சமான சுழல்வேகம் $w_M = \sqrt{\frac{T_M}{mr^2}}$

கம்பி தாங்கக்கூடிய உச்ச இழுவிசையை, இறுதி இழுவை வலு (ultimate tensile strength) என்கிறோம். இதை, ஓர் அலகு குறுக்குப் பரப்பளவில் செயற்படக்கூடிய விசை இவ்வளவு என்ற அடிப்படையில் குறிப்பிடுவது வழக்கமாகும்.

கம்பியின் குறுக்குப் பரப்பளவு A, அடர்த்தி ρ, அலகு குறுக்குப் பரப்பளவில் அது தாங்கக்கூடிய இறுதி இழுவை வலு T_O எனில்

$$m = \rho A$$

$$T_M = T_O A$$

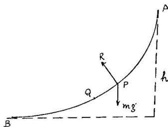
$$\therefore\ w_M = \sqrt{\frac{T_O A}{\rho A r^2}} = \sqrt{\frac{T_O}{\rho r^2}}$$

ஆகவே கம்பியின் மீப்பெரு சுழல்வேகம்,

$$w_M = \sqrt{\frac{T_O}{\rho r^2}}$$

குறிப்பு : மீப்பெரு சுழல்வேகத்தின் இம் மதிப்புக் கம்பியின் குறுக்குப் பரப்பளவைச் சார்ந்திருக்கவில்லை என்பது தெளிவாகிறது.

8.10. செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த ஒரு வளைவின் வழியே ஒரு துகளின் இயக்கம்



படம் 89.

செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த ஒரு வழவழப்பான வளைவில் ஒரு புள்ளியில் இருந்து வளைவின் வழியே கீழ்நோக்கி நழுவும் ஒரு துகளின் இயக்கத்தை இங்குக் கருதுவோம்.

வளைவின்மேல் உள்ள A என்ற புள்ளியில் u என்ற திசைவேகத் துடன் தொடங்கி வளைவின் வழியே நழுவி B என்ற புள்ளியை அடையும்போது, அதன் திசைவேகம் v எனக்கொள்வோம். AB-ன் செங்குத்து ஆழம் h எனில்,

$$v^2 = u^2 + 2gh$$

என்று காட்டலாம்.

P, எனும் புள்ளி A, B-க்கு இடையே, துகள் இருக்கும் ஒரு நிலையைக் குறிக்கிறது. துகளின்மீது செயற்படும் விசைகளாவன :

(i) துகளின் எடை mg; இது செங்குத்தாக கீழ்நோக்கிச் செயற்படும்.

(ii) வளைவின் நேர்குத்து எதிர்விசை R.

ஆற்றல் காப்பு விதியை இங்கு உபயோகிக்கலாம்.

[வளைவு வழவழப்பானதாகையால், அது துகளின்மீது செயற் படுத்தும் எதிர்விசையான R எப்போதும் துகளின் இயக்கத்திற்கு நேர்குத்துத் திசையிலேயே இருக்கும். எனவே துகளின் இயக்கத்தில், எதிர்விசை செய்யும் வேலையின் அளவு பூச்சியம். மற்றொரு விசையான புவிஈர்ப்பு விசை mg, ஒரு காப்பு நிலைவிசை. எனவேதான் ஆற்றல் காப்பு விதியை இங்கு உபயோகிக்கலாம்.]

ஆற்றல் காப்பு விதிப்படி,

இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மிகுதிப்பாடு

= நிலையாற்றலில் ஏற்படும் இழப்பு

= வெளிவிசைகள் செய்யும் வேலை

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mu^2 = (mg)h$$

$$\therefore v^2 - u^2 = 2gh$$

$$\boxed{\therefore v^2 = u^2 + 2gh} \qquad \ldots\ldots(1)$$

துணை முடிவு 1 : வளைவில்மேல் இருந்து கீழே வருவதற்குப் பதிலாக, u என்ற திசைவேகத்துடன் வளைவின் மேலே செல்லுமாறு ஏவப்பட்ட ஒரு துகள், வளைவின்மேல் செங்குத்து உயரம் h உள்ள மற்றொரு புள்ளியை அடையும்போது அதன் திசைவேகம் v எனில்,

இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மிகுதிப்பாடு $= \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mu^2$

வெளிவிசை செய்யும் வேலை $= mg(-h)$

$$\therefore \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mu^2 = -mgh$$

$$\boxed{\therefore v^2 = u^2 - 2gh} \qquad \ldots\ldots(2)$$

துணை முடிவு 2 : சமன்பாடு (2)-லிருந்து, ஒரு துகள் வளைவில் மேலே செல்லச்செல்ல அதன் திசைவேகம் குறைகின்றது என்று காண்கிறோம்.

$h = \dfrac{u^2}{2g}$ எனும்போது $v = 0$

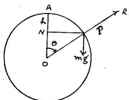
ஆகவே, புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து $\dfrac{u^2}{2g}$ அளவு செங்குத்து உயரம் உள்ளவாறு, வளைவின்மேல் அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளிவரைதான் துகள் செல்லமுடியும் என்று அறிகிறோம்.

மேலும், குறிப்பிட்ட தொடக்கவேகம் (u) உடைய ஒரு துகள் செல் லக்கூடிய செங்குத்து உயரம் $\left(\dfrac{u^2}{2g}\right)$, எந்த வளைவின்மீது செல்கிறதோ

அதன் உருவத்தைப் பொறுத்தது அன்று என்றும் காண்கிறோம். எனவே, துகள் மேலும் கீழுமாக வளைந்துசெல்லும் ஒரு வளைவின்மேல் செலுத்தப்பட்டாலும், அது ஓய்வு பெறுமுன் செல்லக்கூடிய செங்குத்து உயரம், புறப்பட்ட புள்ளியில் இருந்து $\frac{u^2}{2g}$ உயரத்தில் அமைகிறது.

குறிப்பாக ஒரு வளைவின் ஒரு புள்ளியில் இருந்து, ஓய்வில் இருந்து கீழே நழுவும் ஒரு துகள் மறுபடியும் அதே நிலமட்டத்தில்தான் ஓய்வு பெறுகிறது.

8·11. செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வழவழப்பான வட்டத்தின் வெளிப்புறத்தில் நழுவும் துகளின் இயக்கம்.



படம் 90.

m என்ற திணிவை உடைய ஒரு துகள், O என்ற மையத்தையும், a என்ற ஆரத்தையும் கொண்ட செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த, ஒரு வட்டத்தின் உச்சி (A)-யில் ஓய்வு நிலையில் இருந்து, வட்டத்தின் வெளிப்புறமாக நழுவுவதாகக் கொள்வோம்.

துகள் வட்டத்தின்மீது P என்ற புள்ளியில் இருக்கும் கணத்தைக் கருதுவோம். அங்குத் துகளின் வேகம் v எனக் கொள்வோம்.

படத்தில், PN, P-ல் இருந்து OA-க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு. $\angle NOP = \theta$ எனவும், $AN = h$ எனவும் இருக்கட்டும். துகளின்மீது செயற்படும் விசைகள்

(i) கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் துகளின் எடை mg.

(ii) OP வழியே செயல்படும், வட்டத்தின் எதிர்விசை R.

துகளின்மீது செயல்படும் எதிர்விசையான R எப்போதும் துகளின் இயக்கத்திற்கு நேர்குத்துத் திசையிலேயே இருக்கும். எனவே,

துகளின் இயக்கத்தில் எதிர்விசை செய்யும்வேலை பூச்சியமாகும். மேலும், துகளின் எடையான mg ஒரு காப்பு நிலைவிசை. ஆகவே, ஆற்றல் காப்பு விதியை உபயோகிக்கலாம்.

இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மிகுதிப்பாடு = வெளிவிசை செய்யும் வேலை.

$$\therefore \tfrac{1}{2}\,[mv^2 - m\,.\,0^2] = mgh$$

$$\therefore v^2 = 2gh \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\text{ஆனால்,}\quad h = AN = OA - ON$$

$$h = a - a\cos\theta$$

$$\boxed{\therefore v^2 = 2ga\,(1-\cos\theta)} \qquad \ldots\ldots(2)$$

துகள் வட்டத்தின்மீது இயங்குவதால், அதன் வட்ட இயக்கத் திற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசை (PO வழியே) $= \dfrac{mv^2}{a}$ இவ்விசையை PO திசையில் R, mg இவற்றின் குத்துப் பிரிவுகள் அளிக்கின்றன.

$$\therefore \quad mg\cos\theta - R = m\,\frac{v^2}{a} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3)-ல் இருந்து,

$$mg\cos\theta - R = 2mg\,(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{\therefore \quad R = mg\,(3\cos\theta - 2)} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

மேலும்,

$$\cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{a-h}{a}$$

$$\therefore \quad R = mg\left[\frac{3\,(a-h)}{a} - 2\right]$$

$$R = mg\left[\frac{a-3h}{a}\right] \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து துகளின் திசைவேகத்தையும், சமன்பாடு (4)-ல் இருந்து எதிர்விசையையும் கணக்கிடலாம்.

θ-ன் மதிப்பு அதிகமாகும்போது, cos θ-ன் மதிப்பு குறைகின்றது. ஆகவே, v-ன் மதிப்பு அதிகமாகிக்கொண்டே செல்கிறது.

R-ன் மதிப்பு குறைந்துகொண்டே செல்லும். R-ன் மதிப்பைச் சமன்பாடு (5)-ல் இருந்தும் காணலாம். R-ன் மதிப்பு நேர் எண்ணாக உள்ளவரை, துகள் வட்டத்தின்மேல் படிந்து இருக்கும். ஆகவே, துகள் வட்டத்தின்மேல் இயங்க,

$$a - 3h > 0$$

$$h < \frac{a}{3}$$

$h = \frac{a}{3}$ எனில், R-ன் மதிப்பு பூச்சியமாகும். அதற்குப் பிறகு R-ன் மதிப்பு நேரெண்ணாகிறது. எனவே,

$$\boxed{h = \frac{a}{3}}$$

அதாவது, உச்சிப்புள்ளியில் இருந்து அதன் ஆழம் $\frac{a}{3}$, எனும் நிலையில், துகள் வட்டத்தைவிட்டு விலகிச் செல்கின்றது. இதற்குப் பிறகு அது ஒரு ஏவுபொருளாக இயங்கி, ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் செல்கிறது.

துகள் வட்டத்தைவிட்டு விலகும்போது,

$$\cos\theta = \frac{a-h}{a}$$

$$= \frac{a - \frac{a}{3}}{a}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{2}{3}}$$

இதைச் சமன்பாடு (4)-ல் இருந்தும் காணலாம்.

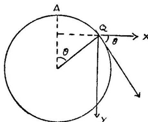
வட்டத்தை விட்டு விலகிய துகள்,

$$v^2 = 2gh = 2g\frac{a}{3}$$

$$v = \sqrt{\frac{2ag}{3}}$$

எனும் திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்ட ஓர் ஏவு துகளாக இயங்கும்.

துணை முடிவு: இவ்வாறு வட்டத்தைவிட்டு விலகி ஏவு துகளாக இயங்கும் துகள் செல்லும் பரவளைவின் செவ்வகலத்தைக் காண்போம்.



படம் 91.

வட்டத்தை விட்டு துகள் விலகிச் செல்லும் புள்ளியை (எறிதானம்) ஆதியாகக் கொள்வோம். அதன் வழியே செல்லும் கிடைகோட்டை x-அச்சாகவும், அப்புள்ளிவழியே கீழ்நோக்கி வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டை y-அச்சு ஆகவும் கொள்வோம்.

$$\text{திசைவேகம்} = \sqrt{\tfrac{2}{3}ga}$$

$$\text{எறிகோணம்}\ \theta = \cos^{-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)$$

பாதையின் சமன்பாடு,

$$y = x\tan\theta - \frac{(-g)\,x^2}{2v^2\cos^2\theta}$$

[y அச்சு கீழ்நோக்கி இருப்பதால், $-g$ என்று கொண்டுள்ளோம்.]

$$y = x\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{gx^2}{2.\frac{2}{3}ga.\frac{4}{9}}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{27}{16a}x^2$$

இது $\frac{16a}{27}$ ஐச் செவ்வகலமாகக் கொண்ட பரவளைவைக் குறிக்கின்றது.

8·12. செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டத்தில் இயங்குமாறு தொங்கவிடப்பட்ட ஒரு துகளின் இயக்கம்.

m என்ற திணிவையுடைய ஒரு துகள், O என்ற ஒரு நிலையான புள்ளியில் இருந்து, l நீளமுள்ள ஓர் இழுபடாத மெல்லிய நூலால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. துகள் அதன் தொடக்கநிலையான A-ல்

இருந்து, u எனும் திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்டு, Oஐ மையமாகக் கொண்டு செங்குத்துத்தளத்தில் அமைந்த ஒரு வட்டத்தில் இயங்கு கிறது. இந்த இயக்கத்தின்போது எந்தவொரு கணத்திலும், துகளின் திசைவேகம், நூலின் இழுவிசை இவற்றைக் காண்பதன் மூலம், துகள்,

(i) தொடர்ந்து வட்டத்தில் சுற்றி வருவதற்கும்

(ii) அலேவியக்கம் மேற்கொள்வதற்கும்

(iii) வட்டத்தில் இருந்து விலகிச் செல்லவும்

உரிய நிபந்தனேகளேப் பெறலாம்.

துகள் P என்ற நிலேயில் இருக்கும் கணத்தைக் கருது வோம். P-ல் துகளின் திசை வேகம் v எனவும், A-ல் இருந்து அதன் உயரம் h எனவும் கொள்வோம். படத்தில்,

$$AN = h$$

$$OP = l$$

$$\angle AOP = \theta$$

துகளின் மீது செயற்படும் விசைகள்

(i) கீழ்நோக்கிச் செயல் படும் துகளின் எடை mg

(ii) நூலின் இழுவிசை T (PO வழியே)

படம் 92.

துகளின்மீது செயற்படும் நூலின் இழுவிசை, துகளின் இயக்கத்தில் எவ்வித வேலேயும் செய்வதில்லே. புவிஈர்ப்பு விசையான mg ஒரு காப்பு நிலேவிசை. எனவே, ஆற்றல் காப்பு விதியை உபயோகிக் கலாம்.

இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மிகுதிப்பாடு = வெளிவிசை செய்யும் வேலே

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mu^2 = -mgh$$

$$\therefore \quad v^2 - u^2 = -2gh$$

$$\boxed{v^2 = u^2 - 2gh} \qquad \dots \dots \dots (1)$$

PO வழியே, துகளின் வட்ட இயக்கத்திற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசையை அளிக்கும், T, mg இவற்றின் குத்துப் பிரிவுகள் $= T - mg\cos\theta$.

$$\therefore\quad T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{l}$$

$$T = \frac{mv^2}{l} + mg\cos\theta$$

$$= \frac{mv^2}{l} + mg\left(\frac{l-h}{l}\right)$$

$$= \frac{m}{l}\left[(u^2-2gh) + g(l-h)\right]$$

$$\therefore\quad T = \frac{m}{l}\left[u^2 + g(l-3h)\right] \qquad \ldots\ \ldots\ (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) முறையே, P-ல் துகளின் திசைவேகத்தையும், நூலின் இழுவிசையையும் கொடுக்கின்றன.

துகள் வட்டத்தில் மேலே செல்லச் செல்ல, h-ன் மதிப்பு அதிகமாகிக் கொண்டே போகிறது. h அதிகமாக ஆக, திசைவேகமும், இழுவிசையும் மதிப்பில் குறைந்துகொண்டே செல்கின்றன. B-ல் அவை இரண்டும் அவற்றின் மீச்சிறு மதிப்பை அடைகின்றன. B-ல் திசைவேகத்தை v_B எனவும், இழுவிசையை T_B எனவும் குறிப்பிட்டால், $h = 2l$ எனப் பிரதியிட,

$$v^2_B = u^2 - 4gl \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ (3)$$

$$T_B = \frac{m}{l}(u^2 - 5gl) \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ (4)$$

(i) துகள் தொடர்ந்து வட்டத்தில் சுற்றி வருவதற்குரிய நிபந்தனை

துகள் தொடர்ந்து வட்டத்தில் சுற்றிவர, அதன் திசைவேகமும், இழுவிசையும் வட்டத்தின் எந்தப் புள்ளியிலும் பூச்சியமாகக் கூடாது. அதாவது அவற்றின் மதிப்புகள் வட்டத்தின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் நேர் எண்ணாக இருக்கவேண்டும். அவற்றின் மீச்சிறு மதிப்புகளான v_B, T_B இரண்டுமே நேர்க்குறி உடையதாக இருக்கவேண்டும்.

$v_B > 0$ இருக்க $u^2 > 4gl$ எனவும்,

$T_B > 0$ இருக்க $u^2 > 5gl$ எனவும்,

இருக்க வேண்டும்.

$u^2 > 5gl$ எனில், T_B, v_B இரண்டுமே நேர்க்குறி உடையன வாக இருக்கும். ஆகவே, துகள் தொடர்ந்து வட்டத்தில் சுற்றிவரும்.

$u^2 = 5gl$ எனில், $T_B = 0$. ஆனாலும் $v_B > 0$. ஆகவே, துகள் தொடர்ந்து வட்டத்தில் சரியாகச் சுற்றிவரும்.

(ii) துகள் அலைவு இயக்கம் (Oscillation) பெறுவதற்குரிய நிபந்தனை

துகளின் திசைவேகம் பூச்சியமாகி, இழுவிசை நேர்க்குறி உடைய தாகவே இருக்கும் நிலையில், துகள் ஒரு கணம் ஓய்வுநிலை எய்தி பாதையில் திரும்பி நழுவுவதால், துகள் அலைவு இயக்கம் பெறும்.

அதாவது நூலின் இழுவிசை பூச்சியமாகும் முன்பே, திசைவேகம் பூச்சியமாயின், துகள் அலைவியக்கம் பெறுகிறது.

திசைவேகம் பூச்சியமாகும் போது, உயரம் h_1 எனில்

$$h_1 = \frac{u^2}{2g} \qquad \text{(சமன்பாடு 1-ல் இருந்து)}$$

நூலின் இழுவிசை பூச்சியமாகும் போது, உயரம் h_2 எனில்

$$h_2 = \frac{u^2+gl}{3g} \qquad \text{(சமன்பாடு 2-ல் இருந்து)}$$

துகள் அலைவியக்கம் பெறவேண்டுமாயின்

$$h_1 < h_2$$

அதாவது $\quad \dfrac{u^2}{2g} < \dfrac{u^2+gl}{3g}$

அல்லது $\quad 3u^2 < 2u^2+2gl$

அதாவது $\quad u^2 < 2gl$

மேலும் $\quad u^2 < 2gl$ எனில் $h_1 < l$

ஆகவே, $u^2 < 2gl$ எனில் துகளின் திசைவேகம், OD-க்கு கீழேயே உள்ள ஒரு புள்ளியில் பூச்சியமாகிவிடுகின்றது. அந்நிலையில் இழுவிசை நேர்க்குறி உடையதாகவே உள்ளது. ஆகவே, துகள் வட்டத்தைவிட்டு விலகாமல் h_1 உயரம் $(<l)$ வரை சென்று, கண நேரம் ஓய்வுற்றுத் திரும்ப நழுவி, அலைவியக்கம் பெறுகிறது. இந்த அலைவியக்கம், தொடக்க நிலையான Aஐ மையமாகக்கொண்டு, அரை வட்டத்தைவிடச் சிறியதான வட்டவில்லின் மீது ஏற்படுகிறது.

$u^2 = 2gl$ எனில்,

$$h_1 = h_2 = l.$$

O-ன் கிடைமட்டத்தில் உள்ள D எனும் புள்ளியில் திசைவேகம், இழுவிசை இரண்டுமே பூச்சியமாகின்றன. இழுவிசை எதிர்க்குறி

உடையதாக ஆகாததால் துகள் இந்த நிலையிலும் வட்டத்தைவிட்டுச் செல்வதில்லை. ஆகவே D வரை சென்று, ஒரு கணம் ஓய்வு நிலை எய்தி, திரும்பி நழுவுவதால், அலைவு இயக்கம் பெறுகின்றது. இங்கு அலைவு இயக்கத்தின் பாதை D-ல் இருந்து, E-வரை உள்ள அரைவட்டமாக அமைகிறது.

(iii) வட்டத்தில் இருந்து விலகிச்செல்ல நிபந்தனை

நூலின் இழுவிசை பூச்சியமாகியும், திசைவேகம் நேர்க்குறி உடையதாகவே இருக்கும் நிலையில், துகள் வட்டப்பாதையை விட்டு விலகிச்செல்கிறது.

அதாவது, திசைவேகம் மறையும்முன்பே, இழுவிசை பூச்சியமாயின் துகள் வட்டப்பாதையை விட்டு விலகுகிறது.

எனவே, துகள் வட்டப் பாதையை விட்டு விலகிச் செல்ல,

$$h_1 > h_2$$

அதாவது
$$\frac{u^2}{2g} > \frac{u^2+gl}{3g}$$
$$3u^2 > 2u^2+2gl$$
$$u^2 > 2gl.$$

ஏற்கெனவே $u^2 \geqslant 5gl$ எனில், துகள் வட்டப்பாதையில் சுற்றிக் கொண்டே இருக்கும் எனக் கண்டோம்.

ஆகவே $u^2 > 2gl$ ஆகவும், $\leqslant 5gl$ ஆகவும் இருப்பின், துகள் வட்டத்தின்மேல் இருந்து விலகிச் செல்கிறது.

துகள் விலகிச் செல்லும் புள்ளி O-ன் வழியே செல்லும் கிடைமட்டத்திற்கு மேலேதான் இருக்கும் எனக் காட்டலாம்.

கயிற்றின் இழுவிசை பூச்சியமாகும் போது உயரம் h_2 $\Big\} = \dfrac{u^2+gl}{3g}$

$$u^2 > 2gl$$
$$\therefore \; h_2 > l$$

எனவே $2gl < u^2 < 5gl$ எனில், துகள் O-ன் மட்டத்தில் உள்ள D-க்கு மேலும், உச்சிப்புள்ளியான B-க்குக் கீழும் இடையில், ஏதோ வொரு புள்ளியில் இழுவிசையை இழக்கின்றது. அப்போது நூல் முறுக்கை இழந்துவிடுகிறது. ஆகவே, துகள் வட்டப்பாதையை விட்டு விலகி, ஓர் எறிபொருளைப் போல் இயங்கி, பரவளைவுப் பாதையில் செல்கிறது.

எனவே,

(i) $u^2 \geqslant 5gl$ எனில், துகள் வட்டத்தைச் சுற்றிவருகிறது.

(ii) $2gl < u^2 < 5gl$ எனில், துகள் வட்டப்பாதையை விட்டு விலகுகிறது.

(iii) $u^2 \leqslant 2\ gl$ எனில், துகள் அலைவு இயக்கம் பெறுகிறது.

குறிப்பு 1 : $h = 0$ எனில், இழுவிசையின் உச்சமதிப்பைப் பெறுகிறோம். A-ல் தான் இழுவிசை அதன் உச்சமதிப்பைப் பெற்றிருக்கிறது.

(3)-ல் இருந்து, உச்சமதிப்பு (மீப்பெறு மதிப்பு) $= \frac{m}{l}[u^2+gl]$

துகள் வட்டத்தை முழுமையாகச் சுற்றிவர, $u^2 \geqslant 5gl$

$\therefore$ இழுவிசையின் உச்சமதிப்பு $\geqslant \frac{m}{l}(5gl+gl)$

$\geqslant 6\ mg$

ஆகவே துகள் வட்டத்தில் சுற்றிவர, இழுவிசையின் உச்சமதிப்பு, குறைந்தது $6\ mg$. அதாவது துகளின் எடையைப்போல் ஆறு மடங்கு. எனவே துகள் வட்டத்தில் சுற்றிவர, நூல் குறைந்தது துகளின் எடையைப்போல் ஆறு மடங்கு எடையைத் தாங்கும் அளவாவது பலம் பொருந்தியதாக இருக்கவேண்டும்.

குறிப்பு 2 : வழவழப்பான செங்குத்து வட்டவளையம் ஒன்றின் உட்புறத்தில், மேல்நோக்கி ஏவப்படும் ஒரு துகளுக்கும் மேற்கூறிய நிபந்தனைகள் பொருந்தும். ஆனால், இங்குக் கயிற்றின் இழுவிசைக்குப் பதிலாக, PO வழியே வளையத்தின் அழுத்தம் செயற்படும்.

குறிப்பு 3 : வழவழப்பான வட்டக்குழாய்க்குள் இயங்குமாறு அமைக்கப்பட்ட துகளுக்கும், வழவழப்பான வளையத்தில் கோக்கப்பட்ட உருமணிக்கும் அவற்றைவிட்டுச் செல்லும் வாய்ப்புக் கிடையாது. ஆகவே, அவை ஒன்று முழுச்சுற்றுச் சுற்றி வரவேண்டும்; அல்லது அலைவு இயக்கம் பெறவேண்டும்.

துகளின்மேல் செயற்படும் அழுத்தம் நேர் எண்ணுகவோ, எதிர் எண்ணுகவோ இருக்கலாம். ஆகவே முழுச்சுற்றுவர $v_B > 0$ போதும். எனவே $u^2 > 4gl$ எனில் B-ல் திசைவேகம் நேர் எண்ணுகவே இருக்கும். ஆகவே முழுச் சுற்றும் சுற்றிவர முடியும்.

எனவே,

(i) $u^2 > 4gl$ எனில், துகள் முழுச் சுற்றும் சுற்றிவரும்.

(ii) $2gl < u^2 < 4gl$ எனில், துகள் அரைவட்டத்தைவிடப் பெரிய வில்லில் அலைவு இயக்கம் பெறுகிறது.

(iii) $u^2 < 2gl$ எனில், துகள் வட்டத்தின் கீழ்ப்பகுதியில் அலைவு இயக்கம் பெறுகிறது.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. 64 டன் திணிவு உள்ள ஓர் இரயில் வண்டி 880 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப் பாதையில் மணிக்கு 60 மைல் வேகத்தில் செல்லுகிறது. வட்ட மையத்தை நோக்கி தண்டவாளங்களின் அழுத்தம் எவ்வளவு எனக் கணக்கிடு.

வேகம் $= 60$ மை/மணி $= 60 \times \frac{22}{15} = 88$ அடி/வி.

வட்ட மையத்தை நோக்கிச் செயற்படும் விசை

$$= \frac{mv^2}{r}$$

$$= \frac{64 \times 2240 \times 88 \times 88}{880} \text{ பவுண்டல்}$$

$$= \frac{64 \times 2240 \times 88 \times 88}{880 \times 32 \times 2240} \text{ டன் எடை}$$

$$= 17{\cdot}6 \text{ டன் எடை}$$

2. கிடைதளத்தில் ஒரு புள்ளியில் கட்டப்பட்ட 40 செ.மீ. நீள முள்ள நூலின் மறுமுனையில் 245 கிராம் திணிவுள்ள ஒரு துகள் கட்டப் பட்டு, கிடைதள மட்டத்தில் விநாடிக்கு 5 முறை வட்டப் பாதையில் சுற்றிவருகிறது. துகளின் குத்து முடுக்கத்தையும், நூலின் இழு விசையையும் கண்டுபிடி.

$T = 40$ செ.மீ.

$w =$ கோணவேகம் $=$ விநாடிக்கு 5 சுற்றுகள்

$= 5 \times 2\pi = 10\pi$

$=$ விநாடிக்கு 10π ஆரையன்கள்

வேகம் $v = rw$

$= 40 \times 10\pi = 400\pi$ செ.மீ./வி.

$\therefore$ குத்து முடுக்கம் $= \frac{v^2}{r}$

$= \frac{400\pi \times 400\pi}{40} = 4000\pi^2$ செ.மீ./வி^{2}.

இழுவிசை T டைன்கள் எனில், கிடைமட்டத்தில் துகளின்மீது செயல்படும் விசை இது ஒன்று மட்டுமே ஆதலால்

$$T = \frac{mv^2}{r} = 245 \times 4000\pi^2$$

$$= 980000\pi^2 \text{ டைன்கள்}$$

$$= 1000\pi^2 \text{ கிராம் எடைகள்}$$

3. $0{\cdot}90 \times 10^{-30}$ கி.கி. திணிவுள்ள ஓர் எலக்ட்ரான், ஒரு காந்த விசையின் சக்தியால், 20 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டத்தில் $3{\cdot}0 \times 10^6$ மீ/வி எனும் வேகத்துடன் சுற்றுகிறது. $1{\cdot}6 \times 10^{-27}$ கி. கி. நிறையுள்ள ஒரு புரோட்டான் அணு அதே விசையின்கீழ், அதே ஆரமுள்ள வட்டத்தில் என்ன வேகத்தில் சுற்றி வரும்?

நிறை m, வட்டத்தில் சீரான வேகம் v, ஆரம் a, F மைய நோக்கு விசை எனில்,

$$F = m\frac{v^2}{a}$$

எலெக்ட்ரான் அணுவிற்கு,

$$F = \frac{0{\cdot}90 \times 10^{-30} \times 9{\cdot}0 \times 10^{12}}{{\cdot}02} \text{ நியூட்டன்கள்}$$

புரோட்டான் அணுவின் வேகம் V எனில்,

$$F = \frac{1{\cdot}6 \times 10^{-27} \times V^2}{{\cdot}02} \text{ நியூட்டன்கள்}$$

$$\therefore \frac{1{\cdot}6 \times 10^{-27}\, V^2}{{\cdot}02} = \frac{0{\cdot}90 \times 10^{-18} \times 9}{{\cdot}02}$$

$$\therefore V^2 = \frac{0{\cdot}90 \times 9 \times 10^9}{1{\cdot}6}$$

$$\therefore V = 7{\cdot}2 \times 10^4 \text{ மீ/வி.}$$

4. 8 அடி நீளமுள்ள ஒரு கயிறு 12 பவு. எடையைச் சற்றே தாங்க முடியும் (can just sustain a weight of 12 lbs). அதன் ஒரு முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ள மூன்று பவுண்டு திணிவுடைய ஒரு துகள், வழவழப்பான கிடைதள மேசையின்மீது, கயிற்றின் மறு முனையைப்பற்றி, கயிறு அறுபடாமல் சுழலக்கூடிய உச்ச வேகம் என்ன?

துகளின் உச்ச வேகம் V என்க.

துகளின் செங்குத்து முடுக்கம் $= \frac{V^2}{r}$ (முடுக்கம் a)

காற்றின் உச்ச இழுவிசை = மைய நோக்கு விசை

$$T = ma$$

$$= 3 \times \frac{V^2}{8} \text{ பவுண்டல்கள்}$$

ஆனால் $T = 12 \times 32$ பவுண்டல்கள்

$$\therefore \quad 3 \times \frac{V^2}{8} = 12 \times 32$$

$$\therefore \quad V = 32 \text{ அடி/வி.}$$

5. ஒரு துகள் வட்ட வடிவமாக அமைந்துள்ள மேசையின் மையத்திலிருந்து 49 செ.மீ. தூரத்தில் இருக்கிறது. மேசை மையப் புள்ளி வழியே நிலைமட்டத்தைப்பற்றி, சிறுகச் சிறுக அதிகரிக்குமாறு உள்ள திசைவேகத்தோடு சுழற்றப்படுகிறது. துகள் நகரும் நிலையில் இருக்கும்போது, அதன் கோணவேகம் என்ன? $\mu = 0 \cdot 2$.

நிலைமட்டத் திசையில், துகளுக்கு இயக்கம் இல்லாததால்,

$$R = mg$$

துகள் நகரும் தறுவாயில்

$$\text{உராய்வு விசை} = \mu R = 0 \cdot 2\, mg.$$

இவ் விசைதான் வட்டப் பாதையில் செல்ல வேண்டிய, மைய நோக்கு விசையை அளிக்கிறது.

$$\therefore \quad \mu \cdot mg = \cdot 2mg = mrw^2 \quad [w \text{ கோணவேகம்}]$$

$$w^2 = \frac{\cdot 2g}{r} = \frac{\cdot 2 \times 980}{49} = 4$$

$$w = 2 \text{ ரேடியன்கள்/விநாடி}$$

6. இரு சம திணிவுள்ள துகள்கள் ஒரு நூலின் முனைகள் ஒவ்வொன்றிலும், ஒவ்வொன்றுகக் கட்டப்பட்டுள்ளன. நூல் மேசையின்மேல் உள்ள துவாரத்தின் வழியாகச் சென்று ஒரு துகள் மேசையின் மேலும், மற்றது மேசையின் கீழும் உள்ளவாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளன. மேசையின்மேல் உள்ள துகள் 9·8 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப் பாதையில் நிமிடத்திற்கு எவ்வளவு முறை சுற்றினுல், தொங்கிக்கொண்டிருக்கும் துகள் ஓய்வுநிலையில் இருக்கும்?

நூலின் இழுவிசை T இரு பகுதிகளிலும் ஒன்றுகவே இருக்கும். துகள்களின் திணிவு m எனில், இரண்டாவது துகள் ஓய்வுநிலையில் இருக்க,

$$T = mg.$$

இதே அளவு இழுவிசைதான், முதல் துகள் வட்டப் பாதையில் செல்ல இயலும் மைய நோக்கு விசையை அளிக்கிறது.

விநாடிக்கு n முறை சுற்றுவதாகக் கொண்டால்,

கோணவேகம் $w = 2\pi n$ ரேடியன்கள்/வி.

$\therefore$ மைய நோக்கு விசை $= mw^2r$

$$= m \cdot 4\pi^2 n^2 \times 9{\cdot}8$$

$$\therefore \; T = m \cdot 4\pi^2 n^2 \cdot 9{\cdot}8$$

$$\therefore \; mg = m \cdot 4\pi^2 n^2 \cdot 9{\cdot}8$$

$$\therefore \; n^2 = \frac{980}{4\pi^2 (9{\cdot}8)} = \frac{25}{\pi^2}$$

$$\therefore \; n = \frac{5}{\pi}$$

$\therefore$ 1 நிமிடத்தில் சுற்று எண்ணிக்கை $= \dfrac{300}{\pi}$

7. ஒரு துகள் சீரான சுழல்வேக முடுக்கம் α இருக்குமாறு, r ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் இயங்குகிறது. ஓய்வில் இருந்து புறப்பட்ட அத்துகள் n சுற்றுகளுக்குப் பிறகு, மையத்தை நோக்கி f அளவு முடுக்கம் உடையதாக இருந்தால் $f = 4\pi r n \alpha$ எனக் காட்டு.
[B.Sc. Sept. 67]

t நேர முடிவில் துகள் சுற்றிவந்த கோணம் θ எனில்

கோண வேகம் $= \dot{\theta}$

சுழல்வேக முடுக்கம் $= \ddot{\theta}$ (கோண முடுக்கம்)

$\ddot{\theta} = \alpha$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$\therefore \dot{\theta} = \alpha t + A$

துகள் ஓய்வில் இருந்து புறப்பட்டது.

$\therefore t = 0$ எனும்போது $\dot{\theta} = 0$

ஆகவே $0 = \alpha(0) + A$

$\therefore A = 0$

$$\dot{\theta} = \alpha t \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\therefore \theta = \alpha \frac{t^2}{2} + B$$

$t = 0$ எனும்போது $\theta = 0$

$\therefore B = 0$

$$\therefore \theta = \alpha \frac{t^2}{2} \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

n சுற்றுகளுக்குப் பிறகு $\theta = 2\pi n$

$$\therefore \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 2\pi n$$

$$t^2 = \frac{4\pi n}{\alpha} \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

மையத்தை நோக்கி முடுக்கம் $= \frac{v^2}{r} = r\dot{\theta}^2$

$= r\alpha^2 t^2$ (1)-ல் இருந்து

$= r\alpha^2 \frac{4\pi n}{\alpha}$ (3)-ல் இருந்து

$= 4\pi r n \alpha$

$$\therefore f = 4\pi r n \alpha$$

8. m என்ற திணிவு உடைய ஒரு துகள் வழவழப்பான கிடைதள மேசையிலிருந்து h உயரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து l நீளமுடைய ஒரு நூலால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. துகள் மேசையின் மீது ஒரு வட்டத்தில் விநாடிக்கு n முறை சுற்றுமாறு செய்யப்படுகிறது. துகள் மேசைமீதே சுற்றுவதற்குரிய n-ன் உச்ச மதிப்பு என்ன?

மேசையின்மீது துகள் இருப்பதால், துகளின்மீது செங்குத்துத் திசையில் செயற்படும் எதிர்விசை R என்க.

கோணவேகம் w எனில்,

செங்குத்துத் திசையில்,

$$R + T\cos\theta = mg \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

கிடைமட்டத் திசையில்,

$$T\sin\theta = m.l\sin\theta.\, w^2 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore T = mw^2 l \quad (\because \sin\theta \neq 0)$$

சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து

$$R = mg - T\cos\theta$$
$$= mg - mw^2 l\cos\theta$$
$$= mg - m.4\pi^2 n^2 l\cos\theta \quad (\because w = 2\pi n)$$
$$= mg - 4m\pi^2 n^2 h$$

துகள் மேசைமீதே இருக்கவேண்டும் எனில், R எதிர்க் குறியுடையதாகாமல் இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $mg - 4m\pi^2 n^2 h \geqslant 0$

$$n^2 \leqslant \frac{g}{4\pi^2 h}$$

$$\therefore \text{ n-ன் உச்ச மதிப்பு } = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}$$

9. ஒரு கூம்பு ஊசலின் 50 செ.மீ. நீளமுள்ள நூலின் முனையில் 500 கிராம் திணிவுள்ள குண்டு கட்டப்பட்டுள்ளது. நூல் தாங்கக்கூடிய அதிகபட்ச இழுவிசை 4 கி.கி. எடை எனில், ஊசல் ஒரு விநாடியில் அதிகபட்சம் எவ்வளவு முறை சுற்றிவரும் எனக் கணக்கிடு. [$\pi^2 = 9{\cdot}8$ எனக் கொள்க.]

ஒரு விநாடியில் அதிகபட்சம் n தடவை சுற்றுவதாகக் கொண்டால்,

$$w = 2\pi n$$

$$T \sin\theta = mrw^2$$

$$= ml \sin\theta \, 4\pi^2 n^2$$

$$\therefore T = 500 \times 50 \times 4 \times 9{\cdot}8 \times n^2$$

ஆனால் கயிற்றின் உச்ச இழுவிசை

$$T = 4 \text{ கி.கி. எடை}$$

$$= 4000 \times 980 \text{ டைன்கள்}$$

$$\therefore 500 \times 50 \times 4 \times 9{\cdot}8 \times n^2 = 4000 \times 980$$

$$\therefore n^2 = 4$$

$\therefore$ **அதிகபட்ச சுழற்சி எண்ணிக்கை = 2**

10. 16 அங். நீளமுள்ள நூல் ஒன்றால் இணைக்கப்பட்ட ஒரு துகள் கூம்பு ஊசலாகச் சுழலுகிறது. 'நூல் செங்குத்து நிலையுடன் அமைக்கும் கோணம் 60° எனில், துகள் 10 விநாடிகளில் ஏறக்குறைய 11 முறை சுற்றிவரும் எனக் காட்டுக. [Sept. 68]

கூம்பு ஊசலின்,

நூலின் நீளம் l எனவும்,

இழுவிசை T எனவும்,

துகளின் திணிவு m எனவும்,

ஊசலின் ஆரம் r எனவும்,

செங்குத்து நிலையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனவும் கொண்டால்,

$$T \cos\theta = mg$$

$$T \sin\theta = mrw^2$$

$$= ml \sin\theta \, w^2$$

$$\therefore T = mlw^2$$

எனவே,

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{lw^2}{g}$$

$$\therefore\ w^2 = \frac{g}{l\cos\theta}$$

$$\text{ஊசலின் சுழற்சி நேரம்} = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

இங்கு $l = 16'' = \frac{4}{3}'$; $\theta = 60°$; $g = 32$

$$\therefore\ \text{சுழற்சி நேரம்} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}}{32}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{48}}$$

$$= \frac{11\sqrt{3}}{21}\ \text{விநாடிகள்}$$

$$1\ \text{விநாடியில் சுழற்சி எண்ணிக்கை} = \frac{21}{11\sqrt{3}}$$

10 விநாடிகளில் சுழற்சி எண்ணிக்கை $= \frac{210}{11\sqrt{3}} = 11$ (சுமாராக)

11. l நீளமுள்ள நூல் ஒன்றுல் இணைக்கப்பட்ட ஒரு துகள் கூம்பு ஊசலாக, விநாடிக்கு n சுற்றுகள் சுற்றிவருகிறது. நூலின் இழுவிசையும், செங்குத்து நிலையுடன் அமைக்கும் கோணமும் மாறுதவாறு, நூலின் நீளம் x அளவு குறைக்கப்பட்டால், சுழற்சி எண்ணிக்கை சுமாராக $\frac{nx}{2l}$ அளவு கூடும் எனக் காட்டு.

$$\text{ஊசலின் சுழற்சி நேரம்} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}} \qquad \ldots\ldots(1)$$

நீளம் $(l-x)$ எனும்போது சுழற்சி எண்ணிக்கை n_1 என்போம்

$$\frac{1}{n_1} = 2\pi\sqrt{\frac{(l-x)\cos\theta}{g}} \qquad \ldots\ldots(2)$$

(1)ஐ, (2)ஆல் வகுக்க

$$\frac{n_1}{n} = \sqrt{\frac{l}{l-x}} = \sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{x}{l}\right)}}$$

$$= \left(1-\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1+\frac{x}{2l} \quad \text{(சுமாராக)}$$

$$\therefore \quad n_1 = n\left[1+\frac{x}{2l}\right]$$

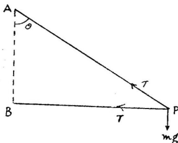
$$\therefore \quad n_1 - n = \frac{nx}{2l}$$

$n_1 - n$ சுழற்சி எண்ணிக்கையில் கூடுதலைக் குறிக்கிறது. ஆகவே, சுழற்சி எண்ணிக்கை சுமாராக $\frac{nx}{2l}$ அளவு கூடும்.

12. l நீளமுள்ள ஒரு நூலின் இரு முனைகளும், செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்துள்ள ஒரு கோட்டின்மேல் உள்ள A, B என்ற புள்ளிகளில் கட்டப்பட்டுள்ளன. AB-க்கு இடையே உள்ள தூரம் a. நூலின் மேல் உள்ள P எனும் வழவழப்பான உருமணி ஒன்று, B-ஐப் பற்றி, BP கிடைதளத்தில் அமையுமாறு சீராகச் சுழலுகிறது. அதன் கோணவேகம்

$$l\left[\frac{2g}{a(l^2-a^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

எனவும், உருமணி A-ஐ விட B இடம் $\frac{a^2}{l}$ அளவு பக்கத்திலும் அமையும் எனக் காட்டு.



படம் 93.

கோணவேகம் $= w$ என்க

$BP = r$ எனில்

$AP = l-r$

உருமணி வழவழப்பானதால், நூலின் இருபகுதிகளிலும் இழுவிசை ஒன்றாக இருக்கும்.

PA-ன் வழி இழுவிசை $= PB$-ன் வழி இழுவிசை $= T$ என்க.

$$\therefore \quad T \cos\theta = mg$$

$$T = mg \sec\theta$$

$$mrw^2 = T + T\sin\theta$$

$$= mg \sec\theta\,(1+\sin\theta)$$

$$\therefore \quad rw^2 = g\,\frac{l-r}{a}\left[1+\frac{r}{l-r}\right] = \frac{gl}{a}$$

$$\therefore \quad w^2 = \frac{gl}{ar} \qquad \ldots\ldots(1)$$

$\Delta\ ABP$-ல்

$$(l-r)^2 = a^2+r^2$$

$$\therefore \quad r = \frac{l^2-a^2}{2l} \qquad \ldots\ldots(2)$$

ஆகவே

$$w^2 = \frac{gl}{a}\cdot\frac{2l}{l^2-a^2}$$

$$\therefore \quad w = l\left[\frac{2g}{a(l^2-a^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

மேலும்

$$AP-BP = (l-r)-r$$

$$= l-2r$$

$$= l-\frac{l^2-a^2}{l}$$

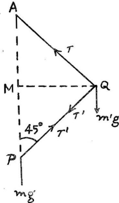
$$= \frac{a^2}{l}.$$

ஆகவே P எனும் உருமணி, $\frac{a^2}{l}$ அளவு B-க்குப் பக்கத்தில் அமைந்துள்ளது.

13. $2l$ நீளமுள்ள ஒரு நூலின் ஒரு முனை செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த நிலையான தண்டு ஒன்றின் A எனும் புள்ளியில் கட்டப் பட்டுள்ளது. அதன் மறுமுனை, தண்டின்மேல் நழுவக்கூடிய m திணிவு உள்ள ஒரு வளையத்தில் கட்டப்பட்டிருக்கிறது. m' திணிவு உள்ள ஒரு துகள், நூலின் மையப்புள்ளியான Q-ல் கட்டப்பட்டு, v எனும் திசை வேகத்துடன், $AQP = 90°$ என இருக்குமாறு, கிடைதளத்தில் ஒரு வட்டத்தில் சுற்றிவருகிறது.

$$m' v^2\sqrt{2} = (2m+m')\, gl$$

என நிறுவுக.



படம் 94.

$\angle AQP = 90°, \quad AQ = QP = l$

$\therefore$ P தண்டின்மேல் நழுவாமல், நிலையாக அமைந்துள்ளது.

QA வழியே இழுவிசை $= T$

QP வழியே இழுவிசை $= T'$

என்க

P-ன் இயக்கத்திற்குச் சமன்பாட்டைத் தண்டின் திசையில் எழுத,

$$0 = mg - \frac{T'}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ T' = mg\sqrt{2} \quad \ldots\ldots(1)$$

Q-ல் அமைந்துள்ள புள்ளி v எனும் வேகத்துடன், வட்டத்தில் சுழல்கிறது.

$$MQ = l \sin 45°$$

$$= \frac{l}{\sqrt{2}}$$

துகளின் இயக்கத்திற்குச் சமன்பாட்டை எழுத,

$$m'g + \frac{T'}{\sqrt{2}} = \frac{T}{\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots(2)$$

$$\frac{T'}{\sqrt{2}} + \frac{T}{\sqrt{2}} = \frac{m'v^2\sqrt{2}}{l} \quad \ldots\ldots(3)$$

(2), (3)-ல் இருந்து

$$\frac{m'v^2\sqrt{2}}{l} = m'g + T'\sqrt{2} \quad \ldots\ldots(4)$$

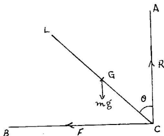
(1), (4)-ல் இருந்து T'ஐ நீக்க

$$\frac{m'v^2\sqrt{2}}{l} = m'g + 2mg$$

$$\therefore \; m'v^2\sqrt{2} = (2m+m')lg$$

14. சைக்கிளில் செல்லும் ஒருவர் 100 அடி விட்டமுள்ள ஒரு வளைவுப் பாதையில் மணிக்கு 10 மைல் வேகத்தில் செல்கிருர். சைக்கிளின் தளம், செங்குத்து நிலையில் இருந்து எவ்வளவு சாய்ந்திருக்கிறது எனக் கணக்கிடு.

சைக்கிள் நழுவாமல் இருக்க, சைக்கிளுக்கும் பாதைக்குமிடையேயுள்ள உராய்வு எண்ணின் சிறும மதிப்பைக் கணக்கிடுக.



படம் 95.

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

$$R = mg$$

$$\therefore \; \tan\theta = \frac{F}{R} = \frac{v^2}{gr}$$

v = 10 மை/ம = $10 \times \frac{22}{15} = \frac{44}{3}$ அடி/வி

r = 50 அடி $\quad g$ = 32 அடி/(வி)^2

$$\therefore \; \tan\theta = \frac{44 \times 44}{9 \times 50 \times 32} = \cdot 1344$$

$$\therefore \; \theta = \tan^{-1}(\cdot 1344) = 7°39'$$

மேலும் F-ன் உச்ச மதிப்பு μR

$$\therefore \quad F \leqslant \mu R$$

$$\therefore \quad v_2 \leqslant \mu g r$$

$$\mu \geqslant \frac{v^2}{gr}$$

ஆகவே μ-ன் சிறும மதிப்பு $= \frac{v^2}{gr} = \cdot 1344$

15. வட்ட வடிவில் அமைந்துள்ள ஓர் இருப்புப் பாதையின் ஆரம் 1089 கெஜம். தண்டவாளங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் 4·5 அடி. வெளிப்புறத் தண்டவாளங்கள், உட்புறத் தண்டவாளங்களைவிட 4 அங். உயர்த்தப்பட்டுள்ளன. சக்கர விளிம்புகள் எவ்வித அழுத்தத்தையும் செயற்படுத்தாமல் இருக்கவேண்டிய வேகம் என்ன?

கிடைமட்டத்துடன், பெட்டியின் அடிப்பாகம் உண்டாக்கும் கோணம் θ எனில்,

$$\tan\theta = \frac{4''}{54''} = \frac{2}{27}$$

விளிம்புகளுக்கும், தண்டவாளங்களுக்கும் இடையே அழுத்தம் இல்லாமல் இருக்க,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\therefore \quad v^2 = gr\tan\theta$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{32 \times (1089 \times 3) \times \frac{2}{27}}$$

$$= 88 \text{ அடி/வி}$$

இரயில் பெட்டி செல்லவேண்டிய வேகம் $= 60$ மை/மணி.

16. 1200 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப் பாதையில், ஓர் இரயில் வண்டி மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் செல்கின்றது. தண்டவாளங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் 5 அடி என்றால், தண்டவாளங்களுக்கும், சக்கர விளிம்புகளுக்கும் இடையே அழுத்தம் இல்லாமல் இருக்க, வெளித்தண்டவாளங்களை எவ்வளவு தூரம் உயர்த்தி அமைக்க வேண்டும்?

கிடைமட்டத்திற்கும், பெட்டியின் அடித்தளத்திற்கும் இடையே உள்ள கோணம் θ எனில்,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr}$$

$v = 30$ மை/மணி $= 44$ அடி/வி

$r = 1200$ அடி

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{44 \times 44}{32 \times 1200}$$

$$= \frac{121}{2400}$$

θ-ன் மதிப்பு சிறியதாகையால்

$$\tan\theta \doteqdot \theta \doteqdot \sin\theta$$

தண்டவாளங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $= 5$ அடி

∴ வெளித் தண்டவாளம் உயர்த்தப்பட

வேண்டிய தூரம் $= 5 \sin\theta$

$$= 5 \times \frac{121}{2400}$$

$$= \frac{121}{480} \text{ அடி}$$

$$= \frac{121}{40} \text{ அங்}$$

$$= 3{\cdot}025 \text{ அங்}$$

வெளிப்புறத் தண்டவாளம், உட்புறத் தண்டவாளத்தைவிடத் தோராயமாக 3·025 அங். உயர்த்தப்படவேண்டும்.

17. ஒரு வட்ட வடிமான பட்டையின் ஆரம் 4 அடி; அதன் திணிவு 1 பவு. அது அதன் வட்டமையத்தைப்பற்றி விநாடிக்கு 8 முறை சீராகச்சுற்றி வருகின்றது. பட்டை தாங்கக்கூடிய இழுவிசை 512π பவுண்டல்களை விட அதிகமாக இல்லாவிட்டால் பட்டை அறுந்து விடும் எனக் காட்டு.

கோணத் திசைவேகம் $= w$ என்க.

இழுவிசை $T = mr^2w^2$

(இங்கு m என்பது ஓர் அலகு நீளப்பட்டையின் திணிவு; r அதன் ஆரம்)

$r = 4$ அடி

$w = 2\pi \times 8 = 16\pi$ ஆரையன்/விநாடி

$$m = \frac{1}{\text{சுற்றளவு}} = \frac{1}{2\pi \times 4} = \frac{1}{8\pi} \text{ பவு.}$$

$$\therefore\ T = \frac{1}{8\pi} \times 16 \times 256\pi^2$$

$$= 512\pi \text{ பவுண்டல்கள்.}$$

எனவே, இழுவிசை 512π பவுண்டல்களுக்குக் குறைவாக இருந்தால் பட்டை அறுந்துவிடும்.

18. ஒரு கால்வாயின் அகலம் 20 மீட்டர். அதன்மேல் வட்ட வில்லின் வடிவத்தில் அமைந்த பாலத்தின் மையப்புள்ளி, அதன் இரு முனைகளை விட $2\frac{1}{2}$ மீட்டர் உயரத்தில் உள்ளது. மோட்டார் சைக்கிளில் செல்லும் ஒருவரின் எடை (சைக்கிளின் எடையுடன் சேர்ந்து) தரைக்கு மேல் $\frac{3}{4}$ மீட்டர் உயரத்தில் அமைவதாகக்கொண்டால், அவர் பாதையை விட்டுத் தூக்கி எறியப்படாமல் செல்லக்கூடிய பெரும வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

படம் 96.

AB பாலத்தைக் குறிக்கின்றது.

D பாலத்தின் உச்சிப்புள்ளி.

O வட்டப்பாதையின் மையம்.

$$OD = r \quad (\text{ஆரம்})$$

$$CD = 5/2$$

$$\left(r - \frac{5}{2}\right)^2 + 10^2 = OB^2 = r^2$$

$$\therefore\ -\frac{5}{4}r + \frac{25}{4} + 100 = 0$$

$$r = \frac{85}{4} \text{ மீட்டர்கள்}$$

∴ புவிஈர்ப்பு மையமான G, $21\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=22$ மீ. ஆரமுள்ள வட்டத்தில் அமையும். m என்பது சைக்கிள், ஓட்டுபவர் இவர்களது திணிவு எனில்,

$$\frac{mv^2}{r} = mg - R$$

$$\therefore\ R = m\left[g - \frac{v^2}{2200}\right]$$

பாதையை விட்டு எகிறிச் செல்லாமல் இருக்க, R எதிர் எண்ணாகக் கூடாது.

அதாவது $v^2 \leqslant 2200\ g$

$v^2 \leqslant \sqrt{22 \times 98000}$ செ.மீ./வி.

∴ பெரும வேகம் (எகிறிச் செல்லாமல் இருக்க)

$= \sqrt{22 \times 98000}$

$= 1468 \cdot 2$ செ.மீ./வி.

$= 14 \cdot 7$ மீ./வி.

19. O-ஐ நிலையாகக் கொண்ட, a நீளமுள்ள OA எனும் ஒரு இழுபடா மெல்லிய நூலின் மறுமுனையில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு துகள், $\sqrt{\frac{7ag}{2}}$ எனும் திசைவேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. அத் துகள் A-ல் இருந்து $\frac{3a}{2}$ உயரத்தை அடைந்த பின்னர் வட்டத்தை விட்டு விலகிச் செல்லும் எனக் காட்டு.

தொடக்க நிலையில் திசைவேகம் u என்றும், h உயரத்தில் இருக்கும் போது திசைவேகம் v எனவும் கொண்டால்

$$v^2 = u^2 - 2gh \qquad \text{......(சமன்பாடு 1, §§ 8·12)}$$

மேலும் இழுவிசை $T = \frac{m}{a}\left[u^2 + g(a-3h)\right]$......(சமன்பாடு 2, §§ 8·12)

$$u = \sqrt{\frac{7ag}{2}}$$

எனவே,

$$\therefore\ v^2 = \frac{7ag}{2} - 2gh$$

$$T = \frac{m}{a}\left[\frac{9ag}{2} - 3gh\right]$$

$h = \frac{3a}{2}$ எனில் T பூச்சியமாகும்.

$h = \frac{7a}{4}$ எனில் v பூச்சியமாகும்.

∴ திசைவேகம் பூச்சியமாகாமல் நேர் எண்ணுகை இருக்கும் போதே, இழுவிசை பூச்சியமாகின்றது.

ஆகவே $h = \frac{3a}{2}$ இருக்கும் போது, துகள் வட்டத்தைவிட்டு விலகிச் செல்கிறது.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1-ஆம் பிரிவு

1. வழவழப்பான கிடைதள மேசைமீது ஒரு நிலையான புள்ளியில் கட்டப்பட்ட 9 அடி நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் மறுமுனையில், 16 பவுண்டு திணிவு உள்ள துகள் ஒன்று கட்டப்பட்டு, 6 அடி/வி. வேகத்துடன் ஒரு வட்டத்தில் இயங்குகிறது. நூலின் இழுவிசையைக் கண்டுபிடி. [2 பவு. எடை]

2. 10 கிராம் திணிவு உள்ள ஒரு துகள், 20 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நூலின் முனையில் கட்டப்பட்டு, அதன் மறுமுனையை நிலையாகக் கொண்டு, ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மேல் 12 செ.மீ./வி. வேகத்துடன் வட்டப்பாதையில் இயங்கிவருகிறது. நூலின் இழுவிசை என்ன? [72 டைன்கள்]

3. 12 அவுன்ஸ் திணிவு உள்ள ஒரு துகள், 3 அடி நீளமுள்ள நூலின் முனையில் கட்டப்பட்டுக் கிடைதளத்தில் வட்டப்பாதையில் சுற்றிவருகிறது. நூல் ஒரு நிமிடத்திற்கு 20 முறை சுற்றிவந்தால், அதன் இழுவிசையைக் கண்டுபிடி. [π^2 பவுண்டல்கள்]

4. வழவழப்பான கிடைதள மேசைமீது ஒரு நிலையான புள்ளியில் கட்டப்பட்ட 20 கிராம் திணிவு உள்ள ஒரு துகள், 60 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில், 4 விநாடிக்கு ஒருமுறை சுற்றிவருகிறது. கயிற்றின் இழுவிசையைக் கண்டுபிடி. [3·02 கிராம் எடை]

5. 8. கிலோகிராம் திணிவு உள்ள நான்கு துகள்கள், 2 மீட்டர் நீளமுள்ள வெவ்வேறு நூல்களால் கட்டப்பட்டு ஒரு சதுரத்தை அமைக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. சதுரம் கிடைதளத்தில் ஒரு முறை சுற்றிவர π விநாடிகள் எடுத்துக்கொண்டால், நூலின் இழுவிசையைக் கண்டுபிடி. [32 நியூட்டன்கள்]

6. 5 அடி நீளமுள்ள ஒரு நூல் 20 பவு. எடையைச் சற்றே தாங்கக்கூடும். அதன் முனையில் கட்டப்பட்டுள்ள 5 பவு திணிவு உள்ள ஒரு துகள், நூல் அறுபடாமல் 10 நிமிடங்களில் எவ்வளவு முறை சுற்றி வரமுடியும். [483]

7. 20 டன் திணிவு உள்ள ஓர் இரயில்வண்டி, கிடைதளத்தில் உள்ள 1200 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் செல்கிறது. தண்டவாளங்கள் இரயில் வண்டியின்மீது செலுத்தும் அழுத்தம் என்ன? [$1\frac{1}{120}$ டன் எடை]

8. மேசையின்மீது, ஒரு முனை நிலையாகக் கட்டப்பட்டுள்ள 4 அடி நீளமுள்ள நூலின் மறுமுனையில், 5 பவு. திணிவு உள்ள ஒரு துகள் கட்டப்பட்டு வட்டப்பாதையில் இயங்குகிறது. கயிற்றின் இழுவிசை $2\frac{1}{2}$ பவு. எடை எனில் துகளின் வேகம் என்ன? [8 அடி/வி.]

9. வட்டமேசைமீது அதன் மையத்தில் இருந்து 3 அடி தொலைவில் ஒரு பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. மேசையை அதன் மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்தான அச்சைப்பற்றிச் சுழற்றத் தொடங்கி, அதன் வேகம் சிறிது சிறிதாக அதிகப்படுத்தப்படுகிறது. $\mu = \cdot 6$ எனில் (உராய்வு எண்) பொருள் நழுவத் தொடங்கும்போது அதன் கோணத்திசைவேகம் என்ன? [2·53 ரேடியன்/வி]

10. வழவழப்பான மேசையில் உள்ள துவாரத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு திணிவுள்ள முனையில் m நூலின் துகளும், மறுமுனையில் M திணிவு உள்ள துகளும் கட்டப்பட்டு, முதல் துகள் மேசையின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. கீழே உள்ள துகள் ஒரு நிலையிலேயே அமைய, மேசைமீதுள்ள துகள் r ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் விநாடிக்கு எவ்வளவு முறை சுற்றி வரவேண்டும்? $\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mg}{mr}}\right]$

11. கிடைதளத்தில் உள்ள 5 அடி விட்டமுள்ள ஒரு வட்டமேசை, அதன் மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்தான அச்சைப்பற்றி நிமிடத்திற்கு 25 முறை சுற்றிவருகிறது. மேசையின்மீது வைக்கப் பட்டுள்ள ஒரு நாணயமும் அதனுடன் சேர்ந்து சுற்றுகிறது. நாணயத் திற்கும் மேசைக்கும் ஆன உராய்வு எண் ·3 எனில், நாணயம் மேசையைவிட்டு ஓடாமல் இருக்க, மையத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் வைக்கப்படவேண்டும். [1·4 அடி]

12. வழவழப்பான கிடைதள மேசைமீது ஒரு புள்ளியில் கட்டப் பட்ட ஓர் அடி நீளமுள்ள மீட்சியுறு நூலின் மறுமுனையில் ஒரு துகள் கட்டப்பட்டு நிமிடத்திற்கு 20 முறை சுற்றுகிறது. நூலின் மீட்சிக்

குணகம் துகளின் எடைக்குச் சமமாயின், நூலின் நீட்சி சுமார் 2 அங். எனக்காட்டு.

13. ஓர் அடி நீளமுள்ள ஒரு மெல்லிய கயிறு, 4 பவு. எடைக்கு 1 அங். நீட்சியைப் பெறக்கூடும். அக்கயிற்றின் ஒரு முனையில் கட்டப் பட்ட 10 பவு. திணிவு உள்ள ஒரு துகள் விநாடிக்கு ஒரு முறை வட்டப் பாதையில் சுழன்று வருகிறது. அந்த வட்டப்பாதையின் ஆரம் 1·346 அடி என்றும், கயிற்றின் இழுவிசை 16·61 பவு. எடை எனவும் காட்டு.

14. ஒரு காட்டாற்றின்மேல் கட்டப்பட்ட பாலம் 50 அடி ஆரமுள்ள வட்டவில்லின் உருவில் அமைந்துள்ளது. வேகமாக மோட்டார் சைக்கிளில் அப்பாலத்தைக் கடக்கும் ஒருவர், பாதையைவிட்டுத் தூக்கி எறியப்படாமல் செல்லக்கூடிய அதிகபட்ச வேகம் என்ன? [40 அடி/வி.]

2-ஆம் பிரிவு

1. 40 பவுண்டு திணிவு உள்ள குண்டையும் 4 அடி நீளமுள்ள கயிற்றையும் கொண்ட ஒரு கூம்பு ஊசல் நிமிடத்திற்கு 30 முறை சுழல்கிறது. கயிற்றின் இழுவிசை $160\pi^2$ பவுண்டல்கள் எனவும், செங்குத்துத் திசையுடன் அது உண்டாக்கும் கோணம் $\cos^{-1}\left(\frac{8}{\pi^2}\right)$ எனவும் காட்டு.

2. செங்குத்துத் திசையுடன் 30° அமைக்கும், 4 அடி நீளமுள்ள கூம்பு ஊசலின் சுழற்சி நேரம் 1·6 விநாடிகள் எனக் காட்டு. குண்டின் எடை 5 பவு. எனில் கயிற்றின் இழுவிசை என்ன? [5·77 பவு.]

3. ஒரு கூம்பு ஊசலின் உயரம் 49 செ.மீ., கயிற்றின் நீளம் 60 செ.மீ., குண்டின் எடை 10 கிராம் எனில் கயிற்றின் இழுவிசை என்ன? [12000 டைன்கள்]

4. செங்குத்துத் திசையுடன் 30° அமைக்கும், 40 செ.மீ. நீள முள்ள கூம்பு ஊசலின்

(i) கோணவேகம் 7 ஆரையன்/விநாடி

(ii) திசைவேகம் 140 செ.மீ./விநாடி

(iii) சுழற்சி எண்ணிக்கை $\frac{7}{2\pi}$

எனக் காட்டு.

5. ஒரு கூம்பு ஊசலில், நூலின் நீளம் 2 அடி, குண்டின் திணிவு 4 பவு. நிமிடத்திற்கு 120 முறை சுற்றும்போது நூல் அறுந்துவிடும் நிலையை அடைகிறது. நூல் தாங்கக்கூடிய உச்ச இழுவிசை என்ன?

[$4\pi^2$ பவு. எடை]

6. ஒரு கூம்பு ஊசல் அமைப்பில் கயிற்றின் நீளம் 3 அடி. குண்டின் திணிவு 2 பவு. கயிற்றின் பெரும இழுவிசை $12\pi^2$ பவு. எடை எனில், ஒரு நிமிடத்தில் பெறக்கூடிய பெருமச் சுழற்சி எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுக. [240]

7. ஒரு கூம்பு ஊசலில் கயிற்றின் நீளம் 1 மீ.; குண்டின் திணிவு 1 கி.கி.; கயிறு தாங்கக்கூடிய இழுவிசை $1\frac{1}{4}$ கி.கி. குண்டின் பெரும சுழல்வேகத்தையும், திசைவேகத்தையும் கணக்கிடு.

[3·5 ஆரையன்கள்/வி.; 2·1 மீ./வி.]

8. A என்ற புள்ளியில் l நீளமுள்ள மீட்சியுறு கயிறு ஒன்றால் இணைக்கப்பட்ட ஒரு துகள் கூம்பு ஊசலாகச் சுற்றுகிறது. கயிற்றின் மீட்சிக் குணகம் துகளின் எடையைப்போல் 5 மடங்கு. கூம்பு ஊசலின் உயரம், கயிற்றின் இயல்பான நீளத்திற்குச் சமமாயின், துகளின் வேகம் $\frac{3}{4}\sqrt{gl}$ எனக்காட்டு.

9. இயல்பான நீளம் l உள்ள ஒரு மீட்சியுறு கயிறு, m திணிவு உடைய ஒரு துகளைத் தாங்கும்போது அதன் நீட்சி x ஆகின்றது. அதே எடையுள்ள துகளுடன் கூம்பு ஊசலாக அமையும்போது கயிற்றின் நீட்சி y எனில்,

$$gy = x\,(l+y)\,w^2$$

என நிறுவுக.

10. $2a$ நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனை O என்ற புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் மையப்புள்ளியில் m திணிவு உடைய ஒரு துகள் கட்டப்பட்டிருக்கிறது. கயிற்றின் மறுமுனையில் அதே அளவு திணிவு உள்ள ஒரு வளையம் உள்ளது. இவ் வளையம் O வழியே செல்லும் ஒரு செங்குத்துச் சட்டத்தின்மீது நழுவமுடியும். துகள், கிடைமட்டத்தில், சட்டத்தைப் பொறுத்து, w எனும் கோணவேகத்துடன் சுழன்றால், கயிற்றின் இரு பகுதிகளும் செங்குத்துத் திசைக்கு

$$\cos^{-1}\left[\frac{3g}{a w^2}\right]$$

எனும் கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கின்றன என நிறுவு.

11. ஒரு துகள் a எனும் சமநீளமுள்ள இரு கயிறுகளால், செங்குத்துக் கோட்டின்மேல் அமைந்துள்ள இரு நிலையான புள்ளி

களுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. துகள் இச் செங்குத்துக் கோட்டைப் பற்றி ω எனும் சீரான கோணவேகத்துடன் சுழல்கின்றது. கயிறுகள் இரண்டும் இறுக்கமாகவும், கிடைமட்டத்துடன் θ அளவு சாய்ந்தும் இருந்தால், அவற்றின் இழுவிசைகள்

$$(a\omega^2 \sin\theta + g) : (a\omega^2 \sin\theta - g)$$

எனும் விகிதத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

12. 10″ நீளமுள்ள புயங்களையுடைய ஓர் எளிய வேகங்காக்கும் அமைவு, நிமிடத்திற்கு 80 சுற்றுகள் வேகத்தில் சுழலுகிறது. புயங்களின் சாய்வுக் கோணத்தைக் கணக்கிடுக. $\left[\cos^{-1}\dfrac{27}{5\pi^2}\right]$

8 ஆம் பிரிவு

1. 4·2 மீ./வி. வேகத்தில் மிதிவண்டியில் செல்லும் ஒருவர், ஒரு வளைவுப் பாதையில் ஒரு திருப்பத்தில் செல்கிறார். மிதிவண்டிக்கும் (சைக்கிளுக்கும்) பாதைக்குமிடையே உராய்வு எண் 0·6 எனில், அவர் கீழே விழாமல் செல்லக்கூடிய வட்டப்பாதையின் மிகக் குறைந்த ஆரம் என்ன? [3 மீட்டர்கள்]

2. 7·5 மைல்/மணி வேகத்தில் சைக்கிளில் செல்லும் ஒருவர், ஒரு வட்டப்பாதையில் ஒரு சந்தின் முனையில் திரும்புகிறார். சைக்கிளுக்கும் பாதைக்கும் இடையே உராய்வு எண் 0·3 எனில், அவர் செல்லக் கூடிய வளைவுப் பாதையின் சிறிய ஆரம் என்ன? [18·9 அடி]

3. சைக்கிள் சக்கரங்களுக்கும் பாதைக்கும் இடையே 0·32 உராய்வு எண் உள்ள, ஒரு கிடைதள வட்டப்பாதையின் ஆரம் 220 அடி எனில், அப் பாதையில் சைக்கிளில் செல்லும் ஒருவர் போகக்கூடிய மிக உயர்ந்த வேகம் என்ன? [32 $\sqrt{2\cdot 2}$ அடி/வி.]

4. 4 மீட்டர் ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் ஒருவர் சைக்கிளில் செல்கிறார். தரையின் உராய்வு எண் $\frac{5}{9}$ எனில், அவர் செல்லக்கூடிய மீப்பெரு வேகம் என்ன? [16·8 கி.மீ./ம.]

5. 100 கெஜ ஆரமுள்ள ஒரு வட்ட வடிவான மைதானத்தில், மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தில் ஒருவர் சைக்கிளில் செல்கிறார். அதே வேகத்தில் கீழேவிழாமல் அப்பாதையைச் சுற்றிவர, அவர் நிலைக் குத்துத் திசையிலிருந்து எவ்வளவு சாய்ந்திருக்க வேண்டும்? $\left[\tan^{-1}\frac{121}{1200}\right]$

6. 100 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில், மணிக்கு 12 மைல் வேகத்தில் ஒருவர் சைக்கிளில் செல்கிறார். அதே வேகத்தில் கீழே

விழாமல் அப்பாதையைச் சுற்றிவர அவர் நிலைக்குத்துத் திசையிலிருந்து எவ்வளவு சாய்ந்திருக்க .வேண்டும்? சைக்கிள் பாதையில் நழுவாமற் செல்லத் தேவையான மிகக் குறைந்த உராய்வு எண் (சைக்கிளுக்கும் பாதைக்கும் இடையே) என்ன? [5° 12′ ; 0·091]

7. $1\frac{1}{2}$ மெட்ரிக் டன்கள் எடையுள்ள ஒரு ட்ராம்வண்டி (Tramcar) $\frac{1}{2}$ கி.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில், மணிக்கு 6 கி.மீ. வேகத்தில் செல்கின்றது. தண்டவாளங்கள்மீது செயற்படும் வெளிப்புற விசை என்ன? [$g=9{\cdot}8$ மீ./வி. எனக்கொள்க.] [$\frac{125}{147}$ கி.கி. எடை]

8. கிடைதள மட்டத்தில் 150 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப் பாதையில் ஒரு மோட்டார்கார் செல்கின்றது. அதன் இரு சக்கரங் களுக்கும் இடையே உள்ள தூரம் 4 அடியாகவும், அதன் புவிஈர்ப்பு மையம் இரு சக்கரங்களுக்கும் மத்தியில், தரையிலிருந்து 3 அடி உயரத்திலும் இருந்தால், அது கவிழ்ந்துவிடாமல் பாதையில் செல்லக் கூடிய மீப்பெரு வேகத்தைக் கண்டுபிடி. [$40\sqrt{2}$ அடி/வி.]

9. கிடைதள மட்டத்தில் 30 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதை யில் ஒரு மின்சார இரயில்வண்டி மணிக்கு 10 மைல் வேகத்தில் செல் கின்றது. இருப்புப்பாதையின் அகலம் 4 அடி 6 அங்குலம் எனில், வண்டி கவிழ்ந்துவிடாமல் இருக்கவேண்டுமானுல் அதன் புவிஈர்ப்பு மையம் தரையிலிருந்து 10 அடி உயரத்திற்குமேல் அமைக்கப்படக் கூடாது எனக் காட்டுக.

10. ஒரு மோட்டார்காரின் வேகம் v. அதன் புவிஈர்ப்பு மையம் தரையிலிருந்து h உயரத்திலும், அதன் சக்கரங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் a என இருக்குமாறும் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் உட் சக்கரங்கள் பாதையில் இருந்து எழும்பிவிடாதவாறு, அது செல்லக் கூடிய வட்டப்பாதையின் மீச்சிறு ஆரம் $\frac{2hv^2}{ag}$ எனக் காட்டுக.

11. ஓர் இரயில்பெட்டி, r ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில், v வேகத் துடன் செல்கின்றது. இருப்புப்பாதையின் அகலம் $2a$. அதன் புவி ஈர்ப்பு மையம் பாதையில் இருந்து h உயரத்தில் இருந்தால், உட் சக்கரங்கள்மீது விழும் அதன் எடையும், வெளிச் சக்கரங்கள்மீது விழும் அதன் எடையும் $gra-hv^2$, $gra+hv^2$ என்ற விகிதத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து இரயில்பெட்டி கவிழாமல் இருக்க,

$$v > \sqrt{\frac{gra}{h}}$$

எனவும் காட்டுக.

12. ஓர் இரயில்வண்டி r ஆரமுள்ள ஒரு பாதையில், v வேகத்துடன் செல்கிறது. இரயில்பெட்டியின் கூரையிலிருந்து ஒரு கயிற்றின் முனையில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள m திணிவு உள்ள ஒரு தூக்குக் குண்டின் விலகுகோணம், $\tan^{-1}(v^2/gr)$ எனவும், கயிற்றின் இழுவிசை $m\sqrt{1+(v^2/gr)^2}$ எனவும் நிறுவுக.

4 ஆம் பிரிவு

1. ஓர் இருப்புப் பாதை ஓரிடத்தில் 1089 கெஜ ஆரமுள்ள வட்டவில்லின் உருவத்தில் அமைந்துள்ளது. இருப்புப் பாதையின் தண்டவாளங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $4\frac{1}{2}$ அடி. வெளிப்புறத் தண்டவாளம், உட்புறத் தண்டவாளத்தை விட 4 அங். உயரமாக அமைக்கப்பட்டிருந்தால், தண்டவாளங்களுக்கும் பெட்டிக்கும் இடையே அழுத்தமே இல்லாதவாறு இருக்க என்ன வேகத்தில் செல்லவேண்டும்?

[60 மை./மணி]

2. ஓர் இரயில்வண்டி மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில், 1200 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் செல்கிறது. தண்டவாளங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் 5 அடி. தண்டவாளங்கள்மீது விளிம்பு அழுத்தம் (flange pressure) இல்லாமல் இருக்க வெளிப்புறத் தண்டவாளங்களைத் கிடைதளத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரம் உயர்த்தி அமைக்கவேண்டும்? [3·025 அங்.]

3. r ஆரமுள்ள வட்டவில்லின் அமைப்பில் உள்ள ஓர் இருப்புப் பாதையின் தண்டவாளங்கள் கிடைதளத்திற்கு θ எனும் கோண அளவு சாய்ந்திருக்குமாறு வெளிப்புறத் தண்டவாளங்கள் உயர்மட்டத்தில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. அப்பாதையில் U அளவு வேகத்துடன் ஓர் இரயில்வண்டி செல்லும்போது, தண்டவாளங்களுக்கும் பாதைக்கும் இடையே அழுத்தமே இருக்காது எனில், $V\ (\gtrless U)$ அளவு வேகத்துடன் ஓர் இரயில்வண்டி செல்லும்போது தண்டவாளங்கள்மீது செயற்படும் விளிம்பு அழுத்தம் $S = \frac{mg\cos\theta}{r}(V^2-U^2)$ என நிறுவுக.

4. ஒரு வட்டவடிவமான இருப்புப்பாதையின் ஆரம் 400 கெஜம். பாதையின் அகலம் 5 அடி. அதன் வெளித் தண்டவாளம் கிடைமட்டத்திலிருந்து 3 அங்குல உயரத்தில் அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது. தண்டவாளங்களின்மீது, விளிம்பு அழுத்தம் இல்லாதவாறு இருக்க ஓர் இரயில் வண்டி ஏறக்குறைய மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் செல்ல வேண்டும் என்று காட்டுக.

இரயில் வண்டியின் எடை 10 டன்கள் எனில்,

(i) வண்டி ஓடாமல் நிற்கும் போதும்,

(ii) மணிக்கு 25 மைல் வேகத்தில் செல்லும் போதும்,

(iii) மணிக்கு 35 மைல் வேகத்தில் செல்லும் போதும்,

தண்டவாளங்களுக்கும் சக்கரங்களுக்கும் இடையே உள்ள அழுத்தங்களைக் கணக்கிடுக.

[(i) 1120 பவு. எடை ; 336 பவு. எடை ; 417 பவு. எடை (சுமாராக)]

5. W எடையுள்ள ஓர் இரயில் பெட்டி, v அளவு வேகத்துடன் செல்லும்போது விளிம்பு அழுத்தம் இல்லாமல் இருப்பதற்கு ஏற்ப அமைக்கப்பட்டிருக்கும் r ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில், ஓடாமல் நிற்கின்றது. தண்டவாளங்களின்மீது உட்புறமாக,

$$W \frac{v^2}{\sqrt{v^4 + r^2 g^2}}$$

எனும் அழுத்தம் செயற்படுகிறது எனக் காட்டுக.

6. ஒரு வளைவுப் பாதை, இரயில் வண்டி V_1 வேகத்துடன் செல்லும் போது உட்புறத் தண்டவாளங்கள்மீது செயல்படும் அழுத்தமும், வண்டி V_2 ($> V_1$) வேகத்துடன் செல்லும்போது வெளிப்புறத் தண்டவாளங்கள்மீது செயல்படும் அழுத்தமும் சமமானதாக இருக்குமளவு உயர்த்தி அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது. இரயில் பெட்டி $\sqrt{\frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)}$ எனும் வேகத்துடன் சென்றால், எந்தத் தண்டவாளத்தின் மீதும் விளிம்பு அழுத்தமே இராது எனக் காட்டுக.

5-ஆம் பிரிவு

1. ஒரு வழவழப்பான நேர் வட்டக் கூம்பின் உச்சிக் கோணம் 2α. அது அச்சை நிலைக்குத்தாகவும், உச்சிப்புள்ளி கீழேயும் உள்ளவாறு, அச்சைப்பற்றி ω எனும் சீரான கோணவேகத்துடன் சுழன்று வருகிறது. அதன் உட்புறப் பரப்பில் வைக்கப்படும் ஒரு துகள் சார்பு அமைதி நிலையில் இருக்க எங்கு வைக்கப்படவேண்டும்?

[அச்சில் இருந்து $\frac{g \cot \alpha}{\omega^2}$ தூரத்தில்]

2. $4a$ செவ்வகலமுள்ள ஒரு பரவளைவு உருவில் அமைந்த வழவழப்பான குழல், அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும், உச்சிப்புள்ளி கீழேயும் உள்ளவாறு வைக்கப்பட்டு, அச்சைப்பற்றிச் சுழலுகின்றது.

(i) சுழற்சியின் கோணவேகம் $\sqrt{\frac{g}{2a}}$ எனில், குழலுக்குள் வைக்கப்படும் துகள் எந் நிலையிலும் சார்பு அமைதி பெற்றிருக்கும் எனவும், (ii) கோணவேகம் வேறு ஏதாவது மதிப்பைப் பெற்றிருந்தால் அது குழலின் அடிப்புள்ளியைத் தவிர வேறெங்கும் சார்பு அமைதி நிலையில் இருக்க முடியாது எனவும் காட்டுக.

3. ஒரு சீரான வட்டவடிவமான கம்பியின் ஆரம் 6 அடி; திணிவு 2 பவு. கம்பி மையத்தைப்பற்றி 1 விநாடிக்கு 12 முறை சுற்றி வருகின்றது. கம்பி தாங்கக்கூடிய இழுவிசை 108π பவு. எடைக்குமேல் இல்லாவிடில், கம்பி உடைந்துவிடும் எனக் காட்டுக.

6-ஆம் பிரிவு

1. ஒரு பாலத்தின் கீழமைந்த $60\frac{1}{2}$ அடி ஆரமுடைய வட்ட வில்லின் வடிவிலமைந்த சாலைவழியே, மோட்டார் சைக்கிளில் செல்லும் ஒருவர், பாலத்தின் உயர்ந்த புள்ளியிலும் பாதையிலிருந்து எகிறிவிடாமல் செல்லக்கூடிய மீப்பெரு வேகம் என்ன? (30 மை./மணி)

2. ஒரு பாலத்தின் கீழமைந்த 63 அடி ஆரமுடைய வட்டவில்லின் வடிவிலமைந்த சாலைவழியே 1 டன் நிறையுள்ள ஒரு கார் மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் செல்லுகிறது. வட்டவில்லின் தாழ்ந்த புள்ளியில் காருக்கும் சாலைக்கும் இடையேயுள்ள எதிர்விசையைக் கணக்கிடுக.

(1·96 டன் எடை)

3. வழவழப்பான நிலையான வட்டத்தின் உச்சியில் ஓய்விலிருந்து ஒரு துகள் வெளிப்புறத்தில் கீழே நழுவுகிறது. துகள் வட்டத்தை விட்டு விலகிச் செல்லும் பரவளைவுப் பாதையின் செவ்வகலம், வட்டத்தின் ஆரத்தில் $\frac{16}{27}$ மடங்கு எனக் காட்டுக.

4. a என்ற ஆரத்தையுடைய வழவழப்பான நிலையான கோளத்தின் உச்சியில், ஓய்விலிருந்து ஒரு துகள் கீழே நழுவுகிறது. துகளானது, கோளத்தின் அடிவழியே செல்லும் கிடைதளத்தைச் செங்குத்து விட்டத்தில் இருந்து $\frac{5}{27}(\sqrt{5}+4\sqrt{2})\,a$ எனும் தொலைவில் வந்து அடையும் எனக் காட்டுக.

5. a எனும் ஆரத்தையுடைய வழவழப்பான நிலையான கோளத்தின் வெளிப்புறத்தில், உச்சியில், ஓய்விலிருந்து m திணிவு உடைய ஒரு துகள் கீழே நழுவுகிறது. துகள் h உயரம் கீழே இறங்கிய நிலையில் கோளத்தின்மேல் அதன் அழுத்தம் $mg\,(a-3h)/a$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, உச்சிப் புள்ளிக்குக் கீழே $\frac{a}{3}$ உயரம் வந்தடைந்த பிறகு, துகள் கோளத்தைவிட்டு அகலும் எனக் காட்டுக.

6. ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் r. அதன் வெளிப்புறத்தில் ஒரு துகள், உச்சிப்புள்ளியிலிருந்து u எனும் திசைவேகத்துடன் ஏவப் படுகிறது. $u^2 < gr$ என்றில்லாவிடில், துகள் உடனே வட்டத்தை விட்டு ஓடிவிடும் எனக் காட்டு.

7. ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் r. அதன் வெளிப்புறத்தில் ஒரு துகள், உச்சிப் புள்ளியில் இருந்து $\sqrt{2ag}$ எனும் திசை வேகத்துடன் ஏவப் படுகிறது. அது $\frac{a}{6}$ ஆழம் (செங்குத்துத் திசையில்) இறங்கிய பிறகு, வட்டத்தைவிட்டு விலகும் எனக் காட்டு. வட்டம் நிற்கும் கிடை தளத்தை அது வந்தடையும்போது அதன் திசைவேகத்தின் மதிப்பைக் காண்க. $\sqrt{\frac{5ag}{2}}$ அடி/வி.

8. a எனும் ஆரத்தையுடைய வட்டத்தின் வெளிப்புறத்தில், உச்சியிலிருந்து (தொடுகோட்டுத் திசையில்), $\sqrt{ga\ (3\sqrt{3}-4)/2}$ எனும் திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் ஏவப்படுகிறது. அது வட்டத்தை விட்டு விலகும்போது அதன் ஆரம் செங்குத்துத் திசையுடன் உண் டாக்கும் கோணத்தைக் காண்க. (45°)

9. ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் a, வட்டத்தின்மேல், உச்சிப் புள்ளியிலிருந்து k எனும் ஆழத்தில் கீழே உள்ள புள்ளியி லிருந்து, m திணிவு உடைய ஒரு துகள், u திசைவேகத்துடன் ஏவப் படுகிறது. துகள் வட்டத்தின்மேல் சுற்றி வரும்போது, t எனும் கணத்தில், உச்சிப்புள்ளியிலிருந்து அது h ஆழத்தில் இருந்தால், அக் கணத்தில் வட்டத்தின் அழுத்தம்

$$\frac{mg}{a}\left[a-3h+2k-\frac{u^2}{g}\right]$$

எனக் காட்டுக.

7-ஆம் பிரிவு

1. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து a நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஓர் எடை மிக்க துகள் ஒன்று $\sqrt{\frac{7ag}{2}}$ எனும் கிடைதள வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. அது செங்குத்துத் திசையுடன் 120° கோணம் உண்டாக்கும்போது கயிறு தொய்ந்துவிடுகின்றது எனக் காட்டுக.

2. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து a நீளமுள்ள கயிற்றால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஓர் எடை மிக்க துகள் ஒன்று $\sqrt{(2+\sqrt{3})\,ag}$

எனும் கிடைதள வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. அது செங்குத்துத் திசையுடன் $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ கோணம் உண்டாக்கும்போது அது ஓர் எறிபொருளாக இயங்க ஆரம்பிக்கின்றது எனக் காட்டுக.

3. a என்ற ஆரத்தையுடைய வழவழப்பான வட்ட வளையத்தின் உட்புறமாக, அதன் அடிப் புள்ளியிலிருந்து $\frac{1}{5}\sqrt{95ga}$ எனும் திசை வேகத்துடன் ஒரு துகள் ஏவப்படுகிறது. அத்துகள், உச்சிப் புள்ளியிலிருந்து $\cos^{-1}\frac{3}{5}$ கோணத் தூரத்தை அடைந்ததும் வட்டத்தைவிட்டு விலகும் எனக் காட்டுக. அக் கணத்தில் அதன் திசைவேகம் $\frac{1}{5}\sqrt{15ag}$ எனவும் காட்டுக.

4. r என்ற ஆரத்தையுடைய வட்ட வளையத்தின் உட்புறமாக, அதன் அடிப் புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் ஏவப்படுகின்றது. அத் துகள் செங்குத்துத் திசையுடன் 30° கோணத் தூரத்தை அடைந்ததும் வட்டத்தைவிட்டு விலகிச் செல்கின்றது. அதன் தொடக்கத் திசைவேகம் என்ன?

[$\sqrt{\frac{1}{2}gr\,(4+3\sqrt{3})}$]

5. ஒரு வட்ட வளையத்தின் கீழ்ப்புள்ளியிலிருந்து ஏவப்படும் ஒரு துகள், சுற்றளவில் மூன்றில் ஒரு பங்கு தூரம் கடந்த பிறகு வட்டப் பாதையைவிட்டு விலகிச் செல்கின்றது. வளையத்தின் ஆரம் 21 அங். எனில், தொடக்கத் திசைவேகம் என்ன? [14 அடி/வி.]

6. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து a நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள m பவு. திணிவு உள்ள ஒரு துகள், $\sqrt{2ag}$ அடி/வி. கிடைதள வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. கயிறு தளரும் போது, துகள் தொங்குதானத்திற்குமேல் எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது? தொங்குதானத்திற்கு $\frac{a}{2}$ நீளம் ஆழத்தில் இருக்கும் புள்ளியில், கயிற்றின் இழுவிசை என்ன? $\left[\frac{2a}{3}\text{ அடி};\ \frac{7mg}{2}\text{ பவுண்டல்கள்}\right]$

7. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து, l நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஒரு துகள் $\sqrt{ngl}$ எனும் கிடைதள வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. உச்சிப் புள்ளியை அடையுமுன்னரே கயிறு தளர்ந்துவிட்டால், அது $\frac{l}{3}(1+n)$ எனும் உயரத்தில் அவ்வாறுகின்றது, எனக் காட்டுக.

8. ஒரு வழவழப்பான வட்ட வளையத்தின் உட்புறமாக, அடிப் புள்ளியிலிருந்து $8\sqrt{3}$ அ/வி., வேகத்துடன் ஒரு துகள் ஏவப்படு

கின்றது. துகள் கீழே விழுமுன் அது செல்லக்கூடிய அதிகப்பட்ச உயரம் என்ன? [3 அடி]

9. a என்ற ஆரத்தையுடைய வழவழப்பான வட்ட வளையத்தின் உட்புறத்தின் வழியே, அதன் அடிப்புள்ளியிலிருந்து $\sqrt{\frac{7ag}{2}}$ எனும் திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் ஏவப்படுகிறது. அத் துகள் $\frac{3a}{2}$ உயரத்தை அடைந்த பின்னர், வட்டத்தைவிட்டு விலகி மீண்டும் ஏவுதானத்தை அடைகிறது எனக் காட்டுக.

10. a ஆரமுடைய வட்ட வளையத்தின் உட்புறமாக, அடிப்புள்ளியிலிருந்து $\left(\frac{ag}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{4+3\sqrt{3}}$ வேகத்துடன் ஒரு துகள் ஏற்படுகின்றது. அது எங்கு வட்டத்தைவிட்டு விலகிச் செல்லும் எனக் கணக்கிடுக.

அது மறுபடியும் வளையத்தை, கிடைதள மட்டத்தில் உள்ள விட்டத்தின் ஒரு முனையில் வந்தடையும் எனக் காட்டுக.

[உச்சிப் புள்ளிவழியே செல்லும் ஆரத்திலிருந்து, 30° கோணத் திசையில்]

11. a ஆரமுடைய வழவழப்பான வட்ட வளையத்தின் உட்புறத்தில் அடிப்புள்ளியிலிருந்து துகள் ஏவப்படுகின்றது. வட்டப் பாதையைவிட்டு விலகிய பின்னர் அது வட்ட மையத்தின் வழியே செல்லக்கூடும் எனில், அதன் தொடக்கத் திசைவேகம் $(\sqrt{3}+1)\sqrt{\frac{ag}{2}}$ எனக் காட்டுக.

12. a ஆரமுடைய வழவழப்பான வட்ட வளையத்தின் உட்புறத்தில் அடிப்புள்ளியிலிருந்து u வேகத்துடன் ஏவப்படும் துகள், உச்சிப் புள்ளியை அடையு முன்பே, வளையத்தைவிட்டு விலகினால் $2ga<u^2<5ga$ எனக் காட்டுக. அவ்வாறு விலகிச் செல்லும் பரவளைவின் செவ்வகலம்

$$\frac{2\,(u^2-2ga)^3}{27g^3a^2}$$

எனவும் காட்டுக.

13. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து 2 மீட்டர் நீளமுள்ள மெல்லிய நூலால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஒரு துகள் கிடைதள வேகத்

துடன் ஏவப்பட்டு, அடிப் புள்ளியிலிருந்து 3 மீட்டர் உயரத்தில் இருக்கும்போது! நூல் தளர்ந்துவிடுகின்றது. அதற்கும் மேல் துகள் $\frac{3}{8}$ மீட்டர் உயரம் செல்லும் எனக் காட்டுக.

[குறிப்பு: $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\theta = 60°$

வட்டத்தைவிட்டு விலகும்போது வேகம் v எனில்

$$mg\cos 60 = \frac{mv^2}{2};\ v^2 = 32$$

இவ்வேகத்துடன், 60° எறிகோணத்தில் அது சாதாரண ஏவுகணையாக இயங்குகின்றது. இதற்கும் மேல் h உயரம் சென்றால் $h = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$ மீட்டர்]

14. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து a நீளமுள்ள மெல்லிய நூலால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஒரு துகள் $\sqrt{ag\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$ எனும் கிடைதள வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. உச்சிப் புள்ளி வழியே செல்லும் ஆரத்திலிருந்து 30° கோணத் தொலைவில் முதன் முதலாகத் தொய்வை அடையும் எனக் காட்டு.

நூல் கிடைதளத்தில் அமையும்போது, நூல் மறுபடியும் இறுக்கத்தை அடைகின்றது என்றும் பிறகு கோணவேகம் $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ இருக்கும்போது மறுபடியும் தளர்ந்துவிடுகின்றது என்றும் காட்டுக.

15. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து a நீளமுள்ள நூலால் தொங்க விடப்பட்டுள்ள, m திணிவு உள்ள ஒரு துகள், சரியாக வட்டத்தில் சுற்றிவரக் கூடிய அளவு, கிடைதள வேகத்துடன் செயல்படுகிறது. துகளின் திசைமுடுக்கத்தையும், நூலின் இழுவிசையையும், கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளில் காண்க.

(i) உச்சப்புள்ளி
(ii) அடிப்புள்ளி
(iii) சரிமையத்தில் உள்ள புள்ளி

[(i) $v = \sqrt{ag}$ $T = 0$
(ii) $v = \sqrt{5ag}$ $T = 6mg$
(iii) $v = \sqrt{3ag}$ $T = 3mg$.]

16. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து a நீளமுள்ள கயிற்றால் தொங்க விடப்பட்டுள்ள ஓர் எடை மிக்க துகள் ஒன்று $\sqrt{6ag}$ எனும் கிடை

தள வேகத்துடன் ஏவப்பட்டுச் செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த ஒரு வட்டத்தில் சுற்றி வருகிறது. கயிறு கிடைமட்டத் திசையில் இருக்கும் போது உள்ள இழுவிசை, துகள் உச்சிப்புள்ளியில் இருக்கும்போது உள்ள இழுவிசையைப்போல் நான்கு மடங்கு எனக் காட்டுக.

17. W எடையுள்ள ஒரு துகள், ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையில் கட்டப்பட்டு, மறுமுனையை நிலையாகக்கொண்ட செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டப்பாதையில் அமைகின்றது. துகள் உச்சிப்புள்ளியிலும், அடிப்புள்ளியிலும் இருக்கும்போது, கயிற்றின் இழுவிசை முறையே mW, nW.

$$n = m+6$$

எனக் காட்டுக.

18. ஓர் எடை மிக்க துகள், ஒரு கயிற்றின் முனையில் கட்டப்பட்டு, செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டப்பாதையில் வளைய வருகின்றது. ஒரு விட்டத்தின் இரு முனைகளிலும் துகள் இருக்கும் போது உள்ள இழுவிசைகளின் கூட்டுத்தொகை, எந்த விட்டத்தை எடுத்துக்கொண்டாலும் ஒன்றே எனக் காட்டுக.

19. 2 அடி நீளமுள்ள கயிற்றின் முனையில் கட்டப்பட்ட ஓர் எடை மிக்க துகள், சமநிலையிலிருந்து ஏவப்பட்டு, ஒரு செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டத்தில் சுற்றிவருகிறது. உச்சிப்புள்ளியில் இருக்கும் கணத்தைப்போல், அடிப்புள்ளியில் இருக்கும் கணத்தில் இழுவிசை மூன்று மடங்கானால், தொடக்கத் திசைவேகம் என்ன?

20. ஓர் ஆகாயவிமானம் செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டப் பாதையில் சுற்றிவருகிறது. பாதையின் ஆரம் 200 கெஜம். கீழ் மட்டத்தில் உள்ள புள்ளியில் ஆகாயவிமானம் தலைகீழாக 120 மை./மணி வேகத்தில் சென்றுகொண்டிருந்தால், 150 பவு. எடையுள்ள மனிதன், இருக்கையைவிட்டுக் கீழே விழாமல் இருக்கவேண்டிய விசை என்ன?

[392 பவு. எடை]

21. ஒரு வழவழப்பான வட்டவளையத்தின் உட்புறம் ஒரு துகள் அடிப்புள்ளியிலிருந்து ஏவப்பட்டு அது சரியாக உச்சிப்புள்ளியை அதன் அடையுமளவு தொடக்கத் திசைவேகம் அமைந்துள்ளது. அழுத்தம் எதிர்க்குறியை அடையும்போது நேரம் $\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \log\ (\sqrt{5}+\sqrt{6})$ எனக் காட்டுக.

22. ஒரு கயிற்றின் முனையில் கட்டப்பட்ட W எடையுடைய ஒரு கல், செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டப்பாதையில் சுற்றி

வருகின்றது. அதன் திசைவேகத்தின் உச்ச மதிப்பு (மீப்பெரு), அதன் மிகக் குறைந்த மதிப்பைக்காட்டிலும் இரு மடங்கு எனில், கயிறு கிடைமட்டத்தில் இருக்கும்போது, அதன் இழுவிசை $\frac{10W}{3}$ எனக் காட்டுக.

23. ஒரு துகள், செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டவடிவமான குழாய்க்குள் சுற்றிக்கொண்டு இருக்கின்றது. அதன் மீப்பெரு வேகம், மீச்சிறு வேகத்தைப்போல் 3 மடங்கு எனில், துகள் செங்குத்துத் திசையில் நகரும்போது, துகள் குழலின்மீது செலுத்தும் அழுத்தமும், அது அடிப்புள்ளியில் இருக்கும்போது செலுத்தும் அழுத்தமும் 5 : 11 என்ற விகிதத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

24. ஒரு மீள்சக்தி உடைய கயிற்றின் சாதாரண நீளம் 6 அடி. 7 பவு. இழுவிசையால் அது ஓர் அடி நீளக்கூடும். அதன் ஒரு முனையை நிலையாகக்கொண்டு, மறுமுனையில் கட்டப்பட்ட 2 பவு. எடை, 20அடி/வி. எனும் சீரான வேகத்துடன் செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டத்தில் சுற்றிவருகின்றது. அதன் அடிப்புள்ளியிலும், உச்சிப்புள்ளியிலும் கயிற்றின் நீளங்கள் என்ன? [6·8 அடி, 6·3 அடி]

25. ஓர் அலைவு இயக்கம்பெறும் ஊசலின், அடிப்புள்ளியில், கயிற்றின் இழுவிசை, குண்டின் இழுவிசையைப்போல் n மடங்கு $(3 > n > 1)$ ஊசல், அலைவியக்கம் பெறும் கோணம் θ,

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3-n}{2}$$

எனும் சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகின்றது எனக்காட்டுக.

26. ஓர் செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த, 2α கோணம் தாக்கும் a ஆரமுள்ள வட்டவில்லின் மேல் m திணிவு உள்ள ஒரு துகள் அலைவியக்கம் பெற்றிருக்கிறது. ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் அழுத்தம் $mg\left(\frac{3v^2}{2ga}+1\right)$ எனில், (v-திசைவேகம்), $\alpha = \frac{\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.

27. ஓர் ஊஞ்சல், நிலையாக இருக்கும்போது ஒரு மனிதனின் இரு மடங்கு எடையைத் தாங்கக்கூடும். அவன் ஆடக்கூடிய உச்ச கோணத் தூரம் காண்க. [120°]

28. ஒரு செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டத்தின் உள்ளே இருக்கும் ஒரு துகள் கிடைமட்டத்தில் உள்ள விட்டத்தைச் சற்றே எட்டிப்பிடிக்கும். பாதையின் எந்த ஒரு புள்ளியிலும், அழுத்தம்

அவ் விட்டத்திற்குக் கீழே உள்ள ஆழத்தின் விகிதத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

29. ஓர் எடை மிக்க துகள், a நீளமுள்ள கயிற்றின் முனையில் தொங்கவிடப்பட்டு, கிடைமட்டத்தில் $\sqrt{2gh}$ திசைவேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது.

(i) துகள் வட்டத்தில் முழுச்சுற்றும் சுற்றிவந்தால், குறைந்த பட்சம் h-ன் மதிப்பு $\frac{5a}{2}$ என்றும்

(ii) கயிறு தொய்ந்துவிட்டால் $a < h < \frac{5a}{2}$ என்றும், இந் நிலையில் துகள் ஏவுதானத்தில் இருந்து செல்லக்கூடிய உச்ச உயரம்

$$\frac{(4a-h)(a+2h)^2}{27a^2}$$

எனவும் காட்டுக.

30. செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வழவழப்பான ஒரு வட்ட வளையத்தின்மேல், உச்சிப்புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு வெளிப்புறத்தில் நழுவும் ஒரு துகளும், அடிப்புள்ளியில் புறப்பட்டுச் சரியாக உச்சிப்புள்ளியை உட்புறமாக அடையக்கூடிய அளவு கிடைதள திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்ட துகளும், வட்டப்பாதையை விட்டு விலகிச்செல்லும் புள்ளி ஒன்றே என்றும், அவை ஒரே பரவளைவின் பகுதிகளில் செல்லும் எனவும் காட்டுக.

31. M திணிவு உடைய ஒரு பந்து, செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த ஒரு வட்ட வடிவமான குழாயின் அடிப்பகுதியில் இருக்கின்றது. m திணிவு உடைய மற்றொரு பந்து குழாயின்வழியே நழுவி அதன் மேல் மோதுகின்றது. மீட்சிக்குணகம் $\frac{m}{M}$ எனில், அவை அடுத்த முறை மோதிய பிறகு குழாய்க்குள் அவை செல்லும் உயரங்கள் $\frac{M^2}{(M-m)^2}$ எனும் விகிதத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

32. AB என்பது O-வைத் தாழ்ந்த புள்ளியாகக்கொண்ட ஒரு செங்குத்து வட்டத்தின் கிடைதள விட்டம். m_1 என்ற திணிவு உடைய ஒரு துகள் வட்டத்தின் உட்புறத்தின் வழியே A-ல் இருந்து புறப்பட்டு O-வில் வைக்கப்பட்டுள்ள m_2 ($>m_1$) என்ற திணிவை யுடைய துகளுடன் மோதுகிறது. இரு பொருள்களும் முழு

மீட்சியுடையனவாக இருப்பின், அவை செல்லும் உயரங்களைக் கணக்கிடுக.

[வட்டத்தின் ஆரம் a எனில்,

$$\frac{4am^2_1}{(m_1+m_2)^2}, \quad \frac{a(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}\Bigg]$$

33. AB என்பது O-வைத் தாழ்ந்த புள்ளியாகக்கொண்ட ஒரு செங்குத்து வட்டத்தின் கிடைதள விட்டம். m_1 திணிவு உடைய பொருளும், m_2 திணிவு உடைய பொருளும், விட்டத்தின் ஒவ்வொரு முனையில் இருந்து ஒரே சமயத்தில் நழுவ ஆரம்பிக்கின்றன. அவை முழு மீட்சியுடையனவாக இருப்பின், O-வில் மோதிக்கொண்டபின் அவை செல்லும் உயரங்கள்

$$(3m_2-m_1)^2 : (3m_1-m_2)^2$$

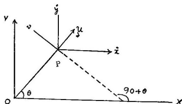
எனும் விகிதத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

9. மைய விசைகள்—மைய ஒழுக்குகள்

(Central forces and Central Orbits)

9·1. சமதளத்தில் அமைந்த ஒரு துகளின் இயக்கத்தை முன்பு கார்டீசியக் குத்துக் கூறுகளைக்கொண்டு பார்த்தோம். ஒரு துகளின் இயக்கத்தைக் கணக்கிட ஏதாவது இரண்டு குத்துத் திசைகளைக் கொள்ளலாம். இங்கு கோண தூரக் கூறுகளைக்கொண்டு பார்ப்போம். அப்போது துகளின் இயக்கத்தை ஆரை முடுக்கம், குறுக்கு முடுக்கம் (Transverse acceleration) இவற்றைக் கொண்டு காணலாம்.

§ 9·2. கோணத் திசைக் கூறுகளில் திசைவேகமும், முடுக்கமும்



படம் 97.

ஒரு வளைவின்மேல், t எனும் நேரத்தில், துகளின் நிலை P ஆக இருக்கட்டும். P-ன் கார்டீஸியக் கூறுகள் (x, y) எனவும், கோணத் தூரக் கூறுகள் (r, θ) எனவும் கொண்டால்

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

P-ன் திசைவேகத்தின் பிரிவுகள் OP வழியே u எனவும், OP-க்குக் குத்தாக θ அதிகரிக்கும் திசையில் v எனவும் கொள்வோம். OX, OY திசைகளில் அப்பிரிவுகள் $\dot{x}$, $\dot{y}$ ஆகும்.

OX வழியே u, v-ஐப் பிரிப்போமாயின்,

$$u \cos \theta + v \cos (90+\theta) = \dot{x}$$

OY வழியே பிரிப்போமாயின்,

$$u \sin \theta + v \sin (90+\theta) = \dot{y}$$

ஆனால்,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \quad (r \cos \theta) = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta . \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \quad (r \sin \theta) = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta . \dot{\theta}$$

எனவே,

$$u \cos \theta - v \sin \theta = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$u \sin \theta + v \cos \theta = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$(1) \times \cos \theta + (2) \times \sin \theta$

$$u (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \dot{r} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\boxed{\therefore \; u = \dot{r}}$$

(1)-ல் $u = \dot{r}$ எனப் பிரதியீடு செய்ய,

$$\boxed{v = r\dot{\theta}}$$

இதேபோன்று P-ன் முடுக்கத்தின் பிரிவுகள் OP வழியே f_1 எனவும், OP-க்குக் குத்தாக θ அதிகரிக்கும் போக்கில் f_2 எனவும் கொள்வோம். OX, OY திசைகளில் அப்பிரிவுகள் $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ ஆகும்.

OX வழியே f_1, f_2 இவற்றைப் பிரிப்போமாயின்

$$f_1 \cos \theta + f_2 \cos (90+\theta) = \ddot{x}$$

OY வழியே பிரிக்க,

$$f_1 \sin \theta + f_2 \sin (90+\theta) = \ddot{y}$$

ஆனால்,

$$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2} \quad (r \cos \theta)$$

$$= \ddot{r} \cos \theta + 2\dot{r} \; (-\sin \theta . \dot{\theta}) + r(-\sin \theta . \ddot{\theta} - \cos \theta . \dot{\theta}^2)$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2} \ (r \sin \theta)$$

$$= \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r} \ (\cos \theta.\dot{\theta}) + r \ (\cos \theta.\ddot{\theta} - \sin \theta.\dot{\theta}^2)$$

எனவே,

$$f_1 \cos \theta - f_2 \sin \theta = \cos \theta. \ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - \sin \theta \ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \ \dots \ (3)$$

$$f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta = \sin \theta \ \ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \cos \theta \ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \ \dots \ (4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4)-ஐத் தீர்க்க,

$$\boxed{f_1 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2}$$

$$f_2 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$\boxed{f_2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \ (r^2\dot{\theta})}$$

குறிப்பு 1 : OP-ன் திசை ஆரைத்திசை எனவும், OP-க்குக் குத்தாக (θ அதிகரிக்குமாறு) உள்ள திசை குறுக்குத் திசை எனவும் கூறப்படும்.

	மதிப்பு	திசை	போக்கு
ஆரைத் திசைவேகம்	$\dot{r}$	ஆரை வழியே	r அதிகரிக்கும் திசையில்
குறுக்குத் திசைவேகம்	$r\dot{\theta}$	ஆரைக்குக் குத்தாக	θ அதிகரிக்கும் போக்கில்
ஆரை முடுக்கம்	$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$	ஆரை வழியே	r அதிகரிக்கும் திசையில்
குறுக்கு முடுக்கம்	$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$	ஆரைக்குக் குத்தாக	θ அதிகரிக்கும் போக்கில்

குறிப்பு 2 : துகள் a ஆரமுடைய ஒரு வட்டப்பாதையில் இயங்குமேயானல்

$$r = a \ \ (\text{மாறுதது}) \ \ \therefore \ \dot{r} = 0 \ \ \ddot{r} = 0$$

எனவே,

$$\text{ஆரை முடுக்கம்} \ = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -a\dot{\theta}^2$$

$$\text{குறுக்கு முடுக்கம்} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{1}{a}\frac{d}{dt}(a^2\dot{\theta}) = a\ddot{\theta}$$

துகள் வட்டத்தில் இயங்கும்போது,

தொடுகோட்டு முடுக்கம் $= a\ddot{\theta}$

லம்ப முடுக்கம் $= a\dot{\theta}^2$ (மையத்தை நோக்கி)

§ 9·3. ஆரத்திசையில் முடுக்கச்சக்தி

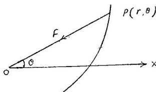
ஒரு துகள், நிலையான ஒரு புள்ளியை நோக்கியோ, அல்லது அப் புள்ளிக்கு நேர் எதிராகவோ செயற்படும் ஒரு விசையின் சக்தியால் (F) இயங்கும்போது, அது செல்லும் பாதையை மைய ஒழுக்கு (Central orbit) என்கிறோம். துகள் ஆரத்திசையில் முடுக்கம் உடையதாக இருக்கிறது. இதை மையமுடுக்கம் என்கிறோம். இந்த முடுக்கத்தை உண்டாக்கும் விசையை, மையவிசை என்றும், அந் நிலையான புள்ளியை விசைமையம் என்றும் குறிக்கிறோம்.

பொதுவாக மையவிசை, விசைமையத்திலிருந்து துகளுக்கு உள்ள தூரத்தை மட்டும் சார்ந்திருக்கிறது. அவ்வித இயக்கம் O வழியே செல்லும் ஒரு தளத்திலேயே இருக்கும்: விசைமையம் O என்றால், t நேரத்தில் துகளின் நிலை Pஆக இருக்கட்டும். தொடு கோடு PT துகளின் அப்போதைய இயக்கதிசை. அக் கணத்தில் OPT தளத்திற்கு குத்தான திசையில், திசைவேகத்தின் பிரிவு பூச்சிய மாகும். மேலும் துகளின் மேல் இயங்கும் ஒரே விசையான மைய விசை PO அல்லது OP திசையில் செயல்படுகிறது. ஆகவே OPT தளத்திற்குக் குத்தான திசையில், எவ்வித விசையும் இல்லை; ஆகவே, அங்கு எவ்வித முடுக்கமும் இல்லை; எனவே அங்கு எவ்விதத் திசைவேக மாறுதலும் இல்லை. அவ்வாறே ஒவ்வொரு கணத்திலும், துகள் OPT எனும் தளத்திலேயே இயங்குகிறது. ஆகவே, துகளின் இயக்கம் சமதளத்தில் அமைந்த ஒரு மையஒழுக்கு ஆகும். இந்த வளையின் பரப்புவேகம் நிலையானது என்று பின்னர்ப் பார்ப்போம்.

§ 9·4. மைய ஒழுக்கின் வகைக்கெழு சமன்பாடு (Differential equation of Central Orbits)

ஒரு துகள், சமதளத்தில், அதன் முடுக்கம் எப்போதும் ஒரு நிலையான புள்ளி O-ஐ நோக்கி இருக்குமாறு இயக்கப்படுகிறது; அதன் பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காணலாம்.

O-ஐ ஆதியாகவும், O வழிச்செல்லும் ஒரு நிலையான கோடான OX-ஐ தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்வோம்.



படம் 98.

துகளின் திணிவு m எனவும், t நேரத்தில் அதன் நிலையின் கோணத் தூரக் கூறுகள் (r, θ) எனவும் இருக்கட்டும். F மையத்தை நோக்கிய முடுக்கமாக இருக்கட்டும்.

இயக்கத்தின் சமன்பாடுகளை எழுத,

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) = -mF$$

$$\therefore \ \ddot{r}-r\dot{\theta}^2 = -F \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$m \cdot \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \qquad \ldots\ldots(2)$$

[குறுக்கு முடுக்கம் பூச்சியமானதால், குறுக்குத் திசையில் விசையும் பூச்சியமாகும்]

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து,

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\therefore \ r^2\dot{\theta} = \text{மாறு எண்} = h \text{ என்போம்} \qquad \ldots\ldots(3)$$

பாதையைக் குறிப்பிட (2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து t-ஐ நீக்கி, r, θ இவற்றிடையே ஒரு தொடர்பைக் காணவேண்டும். இதற்கு வசதியாக இருக்க,

$$r = \frac{1}{u} \text{ என்போம்}$$

(3)-ல் இருந்து $\quad \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = hu^2$

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\dot{u}$$

$$= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}hu^2$$

$$= -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore\ \ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)$$

$$= -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\cdot hu^2$$

$$= -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து,

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}h^2u^4 = -F$$

$$h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = F$$

$$\therefore\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2} \qquad \text{......(4)}$$

இதுதான் கோணத்தூரக் கூறுகளில் மைய ஒழுக்கின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு.

குறிப்பு 1: மையமுடுக்கம் F, விசைமையத்திலிருந்து எதிராகச் செயல்பட்டால், வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F}{h^2u^2}$$

ஆகும்.

குறிப்பு 2: கொடுக்கப்பட்ட மைய முடுக்கத்தை (F) உடைய ஒழுக்கு h-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறாகும். ஆகவே ஒழுக்கின் சமன்பாட்டைக் காண h-ன் மதிப்பை நாம் தொடக்கத்திலேயே அறியவேண்டும்.

குறிப்பு 3 : துகளின் திசைவேகம் v ஐக் காண,

$$v^2 = (\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2$$

$$= \left(-h\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{u^2}(h^2u^4)$$

$$\therefore\ v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \qquad \ldots\ldots(5)$$

குறிப்பு 4 : P-ல் வளைவிற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டிற்கு, O-ல் இருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோட்டின் நீளம் p எனில்

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \quad \text{(வகை நுண்கணிதம் பார்க்க)}$$

$$= u^2 + u^4\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

$$= u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{v^2}{h^2}$$

$$\therefore\ h = vp \qquad \ldots\ldots(6)$$

h சுழல் உந்தத்தைக் குறிக்கின்றது.

§ 9·4. (அ) மைய ஒழுக்கின் பாத வரைச் சமன்பாடு (Pedal equation of a Central orbit)

P எனும் புள்ளியில் வளைவிற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டிற்கு, O-ல் இருந்து வரையப்படும் குத்துக் கோட்டின் நீளம் p எனில்,

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$\therefore\ \frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \quad \left[\because\ r = \frac{1}{u}\right] \qquad \ldots\ldots(7)$$

(7)-ன் இருபக்கத்திற்கும் θ ஐப் பற்றி வகைக்கெழு காண

$$-\frac{2}{p^3}\cdot\frac{dp}{d\theta} = 2u\frac{du}{d\theta} + 2\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$= 2\frac{du}{d\theta}\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) \qquad \ldots\ldots(8)$$

ஆனால் (4) ல் இருந்து

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{F}{h^2u^2}$$

ஆகவே (8) ஐ மாற்றி எழுத

$$-\frac{1}{p^3}\frac{dp}{d\theta}=\frac{F}{h^2u^2}\frac{du}{d\theta}$$

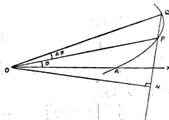
$$-\frac{1}{p^3}\,dp=\frac{F}{h^2u^2}\,du$$

$$=\frac{F}{h^2}\,r^2\,d\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$=\frac{Fr^2}{h^2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr=-\frac{F}{h^2}\,dr$$

$$\therefore\ \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}=F \qquad \text{......(9)}$$

§ 9·5. பரப்பளவு வேகம் (Areal velocity)



படம் 99.

ஒரு நிலையான புள்ளியையும், துகளையும் இணைக்கும் கோடு, துகளின் இயக்கத்தில் உண்டாக்கும் பரப்பளவின் மாறுவீதத்தைப் **பரப்பளவு வேகம்** என்கிறோம்.

துகள், C எனும் சமதளத்தில் அமைந்த வளைவின்மேல் இயங்கு கிறது. O-தளத்தில் உள்ள நிலையான புள்ளி. A ஆரம்பக் காலத்தில் துகளின் இருப்பிடம்.

P, Q முறையே t, $t+\Delta t$ நேரத்தில் துகளின் நிலைகள்.

A, $A+\Delta A$ முறையே AOP, AOQ இவற்றின் பரப்புகள்

ஆரச்சிறை POQ-ன் பரப்பு $=\Delta A$. இது Δt நேரத்தில் உருவாக்கப்பட்டது.

ஆகவே துகள் P-ல் இருக்கும்போது,

பரப்பளவின் மாறு வீதம் $= \underset{\Delta t\to 0}{Lt} \dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dot{A}$

இதைப் பரப்பளவு வேகம் என்கிறோம். இதைக் கோணத்தூரக் கூறு களில் பெறலாம்.

$$\text{பரப்பு } OPQ = \Delta OPQ\text{-ன் பரப்பு (ஏறக்குறைய)}$$

$$= \frac{1}{2} OP.OQ.\sin \angle POQ$$

$$= \frac{1}{2} r(r+\Delta r)\sin \Delta\theta$$

$$= \frac{1}{2} r(r+\Delta r)\Delta\theta \quad [\therefore \sin\Delta\theta \div \Delta\theta]$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta \quad [\Delta r.\Delta\theta \text{ எனும் மிகச் சிறிய அளவை ஒதுக்கிவிட}]$$

$$\therefore \dot{A} = \underset{\Delta t\to 0}{Lt} \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

பரப்பளவு வேகம் $= \dfrac{1}{2} r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$

பரப்பளவு வேகத்தை, துகளின் திசைவேகத்தைச் சார்ந்தும் பெறலாம். வில் $AP=s$, வில் $AQ=s+\Delta s$ எனில், PQ எனும் வில்லின் நீளம் Δs.

ON, PQ-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோடு.

ஆரச்சிறை POQ-ன் பரப்பு $= \Delta POQ$-ன் பரப்பு (சுமாராக)

$$= \frac{1}{2} PQ.ON$$

$\Delta t\to 0$ எனில், Q, Pஐ நெருங்கிவந்து, QP எனும் நாண், P-ல் வரையப்பட்ட தொடுகோடு ஆகும்.

ON = இந்தத் தொடுகோட்டிற்கு O-ல் இருந்து வரையப்பட்ட குத்துக்கோடு; $ON = p$ எனில்,

$$\text{பரப்பளவு வேகம்} = \underset{\Delta t \to o}{Lt} \ \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot p$$

$$= \frac{1}{2} p \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} pv \quad (v, \text{ துகளின் திசைவேகம்})$$

$$\therefore \ \text{பரப்பளவு வேகம்} = \frac{1}{2} pv$$

குறிப்பு 1 : (x, y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ முறையே P, Q-ன் அச்சுத் தூரங்கள் எனில்,

$$\text{பரப்பளவு வேகம்} = \underset{\Delta t \to o}{Lt} \ \frac{\Delta OPQ}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to o}{Lt} \ \frac{\frac{1}{2}[x(y+\Delta y) - y(x+\Delta x)]}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to o}{Lt} \ \frac{\frac{1}{2}[x \cdot \Delta y - y \cdot \Delta x]}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \right].$$

குறிப்பு 2 : வளைவு, ஒரு வட்ட ஒழுக்காக இருந்தால்,

$$r^2 \dot{\theta} = h$$

$$\therefore \ h = 2 \ (\text{பரப்பளவு வேகம்})$$

h நிலையான மதிப்பு உள்ளதாகையால், பரப்பளவு வேகத்தின் மதிப்பும் நிலையானதாகும். அதாவது

சமமான நேரங்களில், சம அளவுள்ள
பரப்பைத்தான், துகளின் ஆரக்கோடு
உண்டாக்குகிறது,

எனக் காண்கிறோம்.

$$\text{மேலும் பரப்பளவு வேகம்} = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} pv$$

$$\therefore\ h = pv$$ (சமன்பாடு 6ஐப் பார்க்க)

$$v = \frac{h}{p}$$

ஆகவே, துகளின் வேகம், தொடுகோட்டிற்கு மையத்திலிருந்து வரையப்பட்ட குத்துக் கோட்டிற்கு எதிர்விகிதத்தில் உள்ளது என்றும் காண்கிறோம்.

9·6. கவியம் (Apse)

மைய ஒழுக்கின்மேல் அமைந்த A எனும் புள்ளியில், திசைவேகம், OA எனும் ஆரத்திற்குக் குத்தாக இருந்தால், Aஐக் **கவியம்** என்றும், OA-ஐ கவியக்கோடு (apse line) என்றும் சொல்கிறோம். ஆகவே, கவியப் புள்ளியில் துகள், ஆரத்திற்குக் குத்தான திசையில் இயங்கு கிறது.

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

என அறிவோம். இங்கு $u = \frac{1}{r}$; p, O-ல் இருந்து தொடுகோட்டுக்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோட்டின் நீளம்.

கவியப் புள்ளியில்

$$p = r = \frac{1}{u}$$

$$\therefore\ \frac{du}{d\theta} = 0$$

$\therefore$ கவியப் புள்ளியில் $\frac{du}{d\theta} = 0$. எனவே அப்புள்ளியில் u மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளை அடையக்கூடும்.

எனவே கவியப் புள்ளியில், r-ன் மதிப்பு, அதன் மீச்சிறு அல்லது மீப்பெரு மதிப்பாகும்.

9·7. மைய ஒழுக்கில் இருவகைக் கணக்குகள்

ஒரு துகள் மையத்தை நோக்கிச் செயற்படும் முடுக்கத்துடன் கூடிய கணக்குகளை இருவகையாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) பாதை கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்; விசையின் விதியைக் காணவேண்டும்.

(ii) விசையின் விதி கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்; பாதையைப் பெறவேண்டும்.

முதல் வகைக் கணக்குகளில், பாதை கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், u, θ-க்கு இடையே உள்ள தொடர்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{F}{h^2u^2}$$

$$\therefore\ F = h^2u^2\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

எனவே பாதையின் சமன்பாட்டில் வகைக்கெழுகண்டு, பிரதியீடு செய்ய, F கிடைக்கும்.

இரண்டாவது வகைக் கணக்குகளில், விசையின் விதி, அதாவது F-ஐ அறிவோம். u, θ-க்கு இடையே உள்ள தொடர்பைக் காண வேண்டும்.

மைய ஒழுக்கின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$u+\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{F}{h^2u^2} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

இதன் தீர்வைக்காண

(1) முதலில் இரு பக்கங்களையும் $2\dfrac{du}{d\theta}$ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

(2) இரு பக்கங்களிலும் θ-வைப் பொறுத்த தொகைக்கெழு காணவேண்டும்.

அதாவது,

$$2\frac{du}{d\theta}\cdot u+2\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2} = 2\frac{F}{h^2u^2}\frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta}(u^2)+\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2F}{h^2u^2}\frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore\ u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \int\frac{2F}{h^2u^2}\,du+A\ldots\ldots\ldots(2)$$

தொடக்க நியதிகளில் இருந்து, A-ன் மதிப்பைச் சுலபமாகப் பெறலாம்.

A-ன் மதிப்பைக் கண்ட பிறகு, சமன்பாடு 2-ன் தொகைக் கெழு காண, u, θ இவற்றிற்கிடையே ஆன தொடர்பைப் பெறலாம்.

9·8. மைய ஒழுக்கு நீள்வளையப் (Conic) பாதையாக இருக்கும் போது விசையை இயக்கும் விதி

ஒரு துகள், குவியத்தை நோக்கிச் செயல்படும் ஒரு விசையின் கீழ், நீள்வளையப் பாதையில் செல்கிறது. அவ் விசையின் விதியைக் காண்போம்.

குவியத்தை ஆதியாகக் கொண்டு, பேரச்சைத் தொடக்கக் கோடாகக் கொண்ட நீள்வளையப் பாதையின் சமன்பாடு,

$$\frac{l}{r} = 1+e\cos\theta$$

$$lu = 1+e\cos\theta \qquad \left[\because\ r = \frac{1}{u}\right]$$

$$l\frac{du}{d\theta} = -e\sin\theta$$

$$l\frac{d^2u}{d\theta^2} = -e\cos\theta$$

மைய ஒழுக்கின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{F}{h^2u^2}$$

$$\therefore\ \frac{F}{h^2u^2} = \frac{-e\cos\theta}{l}+\frac{1+e\cos\theta}{l} = \frac{1}{l}$$

$$\therefore\ F = \frac{h^2u^2}{l}$$

$\mu = \frac{h^2}{l}$ எனில், $F = \mu \, . \, u^2$,

$$\therefore\ F \propto \frac{1}{r^2}$$

அதாவது விசை, தலைகீழ் வர்க்க விதியின்கீழ் இயங்குகின்றது—இது குவியத்தை நோக்கிச் செயல்படுகிறது.

கிளைத்தேற்றம் 1 : திசைவேகம் v காண,

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]$$

$$= h^2\left[\frac{e^2\sin^2\theta}{l^2}+\frac{(1+e\cos\theta)^2}{l^2}\right]$$

$$= \frac{h^2}{l^2}[1+2e\cos\theta+e^2]$$

$$= \frac{\mu}{l}[2(1+e\cos\theta)+e^2-1] \qquad \because \mu = \frac{h^2}{l}$$

$$= \mu\left[\frac{2(1+e\cos\theta)}{l} - \frac{(1-e^2)}{l}\right] \quad \because l = a(1-e^2)$$

$$\boxed{v^2 = \mu\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]}$$

இதிலிருந்து துகளின் திசைவேகம், அது குவியத்தில் இருந்து உள்ள தூரத்தைப் பொறுத்தது ; அது இயங்கும் திசையைப் பொறுத்து இல்லை எனக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு : இதேபோன்ற பரவளைவுப் பாதைக்கு (Parabolic Path)

$$\frac{l}{r} = 1+\cos\theta \qquad [\because e = 1]$$

முன்போலவே, $F = \frac{h^2}{l}\cdot\frac{1}{r^2}$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{2h^2}{l^4}(1+\cos\theta)$$

$$= \frac{2h^2}{l^2}\cdot\frac{l}{r} = 2\frac{h^2}{l}\cdot\frac{1}{r}$$

$$\boxed{v^2 = \frac{2\mu}{r}.}$$

அதிபரவளைவுப் பாதையில் குவியத்துக்கு அருகே உள்ள கிளைக்குச் சமன்பாடு (nearer branch of a hyperbola)

$$\frac{l}{r} = 1+e\cos\theta$$

$$F = \frac{h^2}{l}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{\mu}{r^2}$$

$$v^2 = \mu\left[\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right] \qquad \because l = a(e^2-1)$$

குவியத்துக்கு அருகில் இல்லாத அதிபரவளைவுப் பாதையின் கிளை

$$\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta$$

$$\therefore \quad F = -\frac{h^2}{l}\cdot\frac{1}{r^2} = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$v^2 = \mu\left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r}\right)$$

இங்கு விசை, மையத்தோடு இணைக்கும் கோட்டில் இருந்தாலும், மையத்தை விட்டோடுமாறு உள்ளது. இருந்தாலும் அது தலைகீழ் வர்க்க விதியைக் கடைப்பிடிக்கின்றது.

கிளைத்தேற்றம் 2 : பாதையை ஒருமுறை சுற்றிவர எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் T எனில்,

$$T = \frac{\text{நீள்வளையப் பாதையின் பரப்பு}}{\text{பரப்பு வேகம்}}$$

$$= \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu l}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\, ab\left(\frac{a}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \left(\because l = \frac{b^2}{a}\right)$$

$$= \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$$

$$\therefore \text{ காலவட்ட நேரம் } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2}$$

9·9. விசை $\frac{\mu}{r^2}$ (தலைகீழ் வர்க்க விதி) ; பாதையைக் கண்டுபிடிக்க

மைய ஒழுக்கின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2} = \frac{\mu u^2}{h^2u^2}$$

$\frac{h^2}{\mu} = l$ எனில் $$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{l}$$

இதன் பொதுத் தீர்வைக் காண

$$(D^2+1)\,u = 0$$

$$\therefore \quad u = A\cos(\theta - \alpha)$$

A-யும், α-ம் மாறு எண்கள்.

குறிப்பிட்ட தீர்வைக் காண

$$\text{கு. தீர்வு} = \frac{1}{D^2+1}\,\frac{1}{l}$$

$$= \frac{1}{l}$$

∴ முழுத் தீர்வு

$$u = A\cos(\theta-\alpha)+\frac{1}{l}$$

$$lu = Al\cos(\theta-\alpha)+1$$

$Al = e$ எனில், $\qquad \dfrac{l}{r} = 1+e\cos(\theta-\alpha)$

ஆகவே, பாதை ஒரு கூம்பின் வெட்டுமுகக்கோடு ஆகின்றது. விசை மையம் இதன் குவியம் ஆகும். இதன் அரைச் செவ்வகலம் $l = \dfrac{h^2}{\mu}$

θ-ன் மதிப்பை ஒரு கவியத்திலிருந்து மதிப்பிட, இதை

$$\frac{l}{r} = 1+e\cos\theta$$

என்றே கொள்ளலாம்.

முன்பு கூறிய மாதிரியே திசைவேகத்தைக் கணக்கிடலாம்.

நீள்வளையப் பாதைக்கு $v^2 = \mu\left[\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a}\right]$

பரவளைவுப் பாதைக்கு $v^2 = \dfrac{2\mu}{r}$

அதிபரவளைவின் குவியத்துக்கு அருகே உள்ள கிளையில்

$$v^2 = \mu\left[\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right]$$

எனவே,

$v^2 < \dfrac{2\mu}{r}$ எனில் நீள்வளையப் பாதை

$v^2 = \dfrac{2\mu}{r}$ எனில் பரவளைவுப் பாதை

$v^2 > \dfrac{2\mu}{r}$ எனில் அதிபரவளைவின் குவியத்துக்கு அருகே உள்ள கிளை ஆகும்.

தலைகீழ் வர்க்க விதி ; கோள்களின் பாதை

ஒரு துகள், $\frac{\mu}{(\text{தூரம்})^2}$ எனும் மைய முடுக்கத்தோடு இயங்குகின்றது. அதன் பாதை ஒரு கூம்பு வெட்டியில் (Conic section) அமையும் எனக் காட்டுக.

மையப் புள்ளியை நோக்கிய முடுக்கம்

$$F = \frac{\mu}{r^2}$$

மைய ஒழுக்கின் $p - r$ சமன்பாடு

$$\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} = F = \frac{\mu}{r^2} \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\therefore \; h^2 \frac{dp}{p^3} = \mu \frac{dr}{r^2}$$

தொகைக்கெழு காண,

$$-\frac{h^2}{2p^2} = -\frac{\mu}{r} + \text{மாறு எண்}$$

$$\therefore \; \frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + C \qquad \ldots\ldots(2)$$

மேலும், v என்பது r தூரத்தில் உள்ள புள்ளியில் திசைவேகம் எனில்,

$$h = pv$$

$$\therefore \; v^2 = \frac{2\mu}{r} + C \qquad \ldots\ldots(3)$$

குவியத்தை முனைவாகக் கொண்ட பரவளைவு, நீள்வட்டம், அதிபரவளைவின் பக்கத்துக் கிளை ஆகியவற்றின் $p - r$ சமன்பாடுகள்

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= ar \\ \frac{b^2}{p^2} &= \frac{2a}{r} - 1 \\ \frac{b^2}{p^2} &= \frac{2a}{r} + 1 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(4)$$

என அறிவோம்.

(i) பரவளேவின் சமன்பாட்டையும், சமன்பாடு (2)-ஐயும் ஒப்பிட

$$\frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + C$$

$$p^2 = ar$$

$\therefore C = 0$	$h^2 = 2\mu a$	$\therefore v^2 = \frac{2\mu}{r}$	I

(ii) நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும், சமன்பாடு (2)-ஐயும் ஒப்பிட

$$\frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + C$$

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$$

$$\therefore \frac{h^2}{b^2} = \frac{2\mu}{2a} = \frac{C}{-1}$$

$\therefore C = -\frac{\mu}{a}$	$h^2 = \frac{\mu b^2}{a}$	$\therefore v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$	II

(iii) அதிபரவளேவின் (பக்கத்துக் கிளே) சமன்பாட்டையும், சமன்பாடு (2)-ஐயும் ஒப்பிட

$$\frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + C$$

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} + 1$$

$$\therefore \frac{h^2}{b^2} = \frac{2\mu}{2a} = \frac{C}{1}$$

$\therefore C = \frac{\mu}{a}$	$h^2 = \frac{\mu b^2}{a}$	$\therefore v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$	III

எனவே

$C < 0$ எனில், $v^2 < \frac{2\mu}{r}$, மைய ஒழுக்கு ஒரு நீள்வட்டம்



$C = 0$ எனில், $v^2 = \frac{2\mu}{r}$, மைய ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவு

$C > 0$ எனில், $v^2 > \frac{2\mu}{r}$, மைய ஒழுக்கு ஓர் அதிபரவளைவு

(பக்கத்துக் கிளை)

எனவே மைய ஒழுக்கு, இந்த மூன்றில் ஒன்ருக, அதாவது ஒரு கூம்பு வெட்டி ஆக அமைகின்றது.

குறிப்பு 1: S குவியப் புள்ளி என்றும், P துகள் அமையும் புள்ளி என்றும் கொண்டால்,

துகளின் வேகத்தின் வர்க்கம், $< \frac{2\mu}{SP}$ எனில் நீள்வட்டம்

$= \frac{2\mu}{SP}$ எனில் பரவளைவு

$> \frac{2\mu}{SP}$ எனில் அதிபரவளைவு

குறிப்பு 2: மைய ஒழுக்கின் ஒரு புள்ளியில் திசைவேகம் v எனில்,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{நீள்வட்டப் பாதையில்} & v^2 = \mu\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right] \\ \text{பரவளைவுப் பாதையில்} & v^2 = \frac{2\mu}{r} \\ \text{அதிபரவளைவுப் பாதையில் (பக்கத்துக் கிளை)} & v^2 = \mu\left[\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right] \end{array}\right\} \quad \dots \dots \quad (5)$$

இதிலிருந்து, தலைகீழ் வர்க்க விதியின் கீழான மைய ஒழுக்கில், எந்தப் புள்ளியிலும் திசைவேகம் மூலையில் இருந்து உள்ள தூரத்தை மட்டுமே பொறுத்தது. அது அவ்வப்போது சென்றுகொண்டிருக்கும் திசையைப் பொறுத்தது அன்று என அறிகிறோம்.

குறிப்பு 3: நீள்வட்ட, அதிபரவளைவுப் பாதைகளில்

$$h^2 = \mu\frac{b^2}{a} \quad \text{(II, IIIஐக் காண்க)}$$

$$= \mu\,[\text{அரைச் செவ்வகலம்}]$$

$$= \mu l$$

ஆகவே l அரைச் செவ்வகல நீளத்தைக் குறித்தால்,

$$h^2 = \mu l$$

பரவளைவுப் பாதையில் $l = \frac{1}{2}(4a) = 2a$

$$h^2 = 2\mu a$$

$$= \mu l$$

எனவே மூன்று பாதைகளிலும்

$$\boxed{h^2 = \mu l}$$

குறிப்பு 4: முன் கூறிய மூன்று பாதைகளிலும், நீள்வட்டம் மட்டுமே ஓர் அடைத்த வளைவரை (closed curve).

நீள்வட்டத்தின் பரப்பு $= \pi ab$

பரப்பு வேகம் $= \frac{1}{2}h$

$$\therefore \quad T = \frac{\pi ab}{(\frac{1}{2}h)}$$

$$= \frac{2\pi ab}{h}$$

$$= \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu \cdot \frac{b^2}{a}}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}.$$

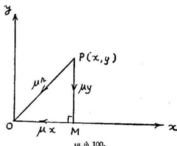
குறிப்பு 5: வான சாஸ்திரத்தில், முக்கியமான பாதை நீள்வட்டமே. கோள்கள், சூரியனைச் சுற்றி நீள்வட்டப் பாதையில் இயங்குகின்றன.

பல வருடங்களுக்கு ஒரு முறை திரும்பத் திரும்ப வரும் வால் நட்சத்திரங்கள், மிகவும் நீண்ட நீள்வட்டப் பாதையில் (ஏறக்குறையப் பரவளைவை ஒத்த) இயங்குகின்றன.

பரவளைவுப் பாதையிலோ, அதிபரவளைவுப் பாதையிலோ இயங்கும் ஒரு கோள், சூரிய மண்டலத்தை விட்டு, திரும்பவே திரும்பாதவாறு ஓடிவிடும்.

9·10. நீள்வளையப் பாதையில் இயக்கம்

ஒரு துகள், அதன் முடுக்கம் ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கி இருக்குமாறும், அப் புள்ளியில் இருந்து உள்ள தூரத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்குமாறும் இயங்குகிறது. அதன் மைய ஒழுக்கைக் காண்போம்.



படம் 100.

O விசை மையம்

t எனும் கணத்தில் துகளின் நிலை P (x, y) என்ற புள்ளி

$OP = r$ என்க.

∴ PO-ன் திசையில் செயல்படும் விசை $\propto r$,

அதாவது $= m \cdot n^2r$ என்போம்.

n^2r-ன் பிரிவுகள், MO வழியே μx, PM வழியே μy

இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுத,

$$\ddot{x} = -n^2x \quad \text{......(1)}$$

$$\ddot{y} = -n^2y \quad \text{......(2)}$$

(1), (2) இவற்றின் பொதுத் தீர்வுகள்,

$$x = A\cos nt + B\sin nt \quad \text{......(3)}$$

$$y = C\cos nt + D\sin nt \quad \text{......(4)}$$

A, B, C, D மாறா எண்கள். இவற்றைத் தொடக்கத்தில் உள்ள இயக்கத்தை வைத்துக் கணக்கிடலாம்.

$(3)\times D-(4)\times B$,

$$xD-By = (AD-BC)\cos nt \quad \text{......(5)}$$

$(3)\times C-(4)\times A$,

$$xC-Ay = (BC-AD)\sin nt \quad \text{......(6)}$$

சமன்பாடுகள் (5), (6)-ல் இருந்து, t-ஐ நீக்கிவிட,

$$(Dx-By)^2+(Cx-Ay)^2 = (AD-BC)^2$$

$$x^2(C^2+D^2)-2xy(BD+AC)+y^2(A^2+B^2) = (AD-BC)^2 \ldots (7)$$

இது

$$ax^2+2hxy+by^2 = \lambda$$

எனும் தோற்றத்தில் இருப்பதால், மையக் கூம்பு வளைவைக் குறிக்கின்றது.

$$ab-h^2 = (C^2+D^2)(A^2+B^2)-(BD+AC)^2$$
$$= (BC-AD)^2$$
$$> 0$$
$$\therefore \ h^2-ab > 0$$

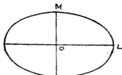
இந்தக் கூம்பு வளைவு ஒரு நீள்வளையப் பாதையாகும். இதன் மையம், விசை மையமாக இருக்கும்.

குறிப்பு 1: சமன்பாடுகள் (3), (4)-ல் இருந்து, A, B, C, D-ன் மதிப்பு எதுவானாலும், அதாவது தொடக்கநிலை எதுவானாலும், t-க்கு $t+\frac{2\pi}{n}$ பிரதியிடு செய்ய, x, y-ன் மதிப்புகள் மாறுவதில்லை. ஆகவே, இதன் காலவட்டம் $\frac{2\pi}{n}$ எனலாம். இந்த இயக்கத்தை நீள்வளையத் தனியிசை இயக்கம் (Elliptic simple harmonic motion) எனலாம்.

குறிப்பு 2: OX-ன் மீது O-விலிருந்து a தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து, OY-க்கு இணையான திசையில் V எனும் திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், தொடக்கநிலை, $t=0$-ல்,

$$x = a \qquad \dot{x} = 0$$
$$y = 0 \qquad \dot{y} = V$$

ஆகும்.



படம் 101.

சமன்பாடுகளில் பிரதியீடு செய்ய,

$$A = a\,;\ B = 0 = C\,;\ D = \frac{V}{n}$$

எனவே பாதையின் சமன்பாடு

$$x = a\cos nt$$

$$y = \frac{V}{n}\sin nt$$

அதாவது $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ஆகும். $\left[\, b = \frac{V}{n} \text{ எனில்} \right]$

ஆகவே இயக்கப்பாதை, இச் சமன்பாடு கொடுக்கும் நீள்வளையப் பாதையாகும்.

மேலும் $x = 0$ எனில் $0y = b\,;\ OM = \frac{V}{n}$

$$\therefore\ V = n \cdot OM$$

∴ எறிதானத்தில் (L) திசைவேகம் $= n.$ [OL-ன் அரை இணை விட்டம்]

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. ஒரு துகள் ஆரத்திசையில் முடுக்கம் இல்லாதவாறு, $r = ae^{\theta}$ எனும் சமகோணச் சுருளியின்மீது இயங்குகிறது. அதன் கோணவேகம் ஒரு மாறு எண் என்றும், திசைவேகம், முடுக்கம் இரண்டும் r-க்கு நேர்விகிதத்தில் உள்ளன எனவும் காட்டுக.

துகளின் பாதை $r = ae^{\theta}$ ....(1)

ஆரை முடுக்கம் $= 0$

$$\therefore\ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\therefore\ \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 \qquad \text{.........(2)}$$

$$\dot{r} = ae^{\theta}\cdot\dot{\theta} = r\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = \dot{r}\,\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$= r\dot{\theta}^2 + r\,\ddot{\theta} \qquad \text{.........(3)}$$

(2), (3)-ல் இருந்து

$$r\ddot{\theta} = 0$$

$$\therefore\ \ddot{\theta} = 0$$

$\therefore \dot{\theta} =$ மாறா எண் $= w$ என்க.

$$\boxed{\dot{\theta} = w}$$

$$(\text{திசைவேகம்})^2 = (\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2$$
$$= (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\theta})^2$$
$$= 2r^2 w^2$$

திசைவேகம் $= rw\sqrt{2}$

$$\boxed{\text{திசைவேகம்} \propto r}$$

$$(\text{முடுக்கம்})^2 = (\text{ஆரை முடுக்கம்})^2 + (\text{குறுக்கு முடுக்கம்})^2$$
$$= (\text{குறுக்கு முடுக்கம்})^2$$

$$\text{குறுக்கு முடுக்கம்} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$
$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2 w)$$
$$= \frac{w}{r}\cdot 2r\frac{dr}{dt}$$
$$= 2w(\dot{r})$$
$$= 2w(r\dot{\theta})$$
$$= 2w^2 r$$

$\therefore$ முடுக்கம் $= 2rw^2$

$$\boxed{\text{முடுக்கம்} \propto r}$$

2. ஒரு துகளின் ஆரைத் திசைவேகப் பிரிவு λr; குறுக்குத் திசைவேகப் பிரிவு $\mu\theta$. துகளின் இயக்கப் பாதையைக் கண்டு, ஆரை முடுக்கமும், குறுக்கு முடுக்கமும் முறையே $\left(\lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r}\right)$, $\mu\theta\left(\lambda + \frac{\mu}{r}\right)$ என நிறுவுக.

ஆரைத் திசைவேகம் $\dot{r} = \lambda r$ ......(1)

குறுக்குத் திசைவேகம் $r\dot{\theta} = \mu\theta$ ......(2)

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = \mu\theta$$

$$\therefore \quad r\frac{d\theta}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \mu\theta$$

$$\lambda r^2\frac{d\theta}{dr} = \mu\theta$$

$$\therefore \quad \frac{d\theta}{\theta} = \frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{1}{r^2} \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$\therefore \quad \log\theta + \log c = -\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{1}{r}$$

$$\boxed{\therefore \quad c\theta = e^{-\mu/\lambda r}} \qquad \ldots\ldots(4)$$

இது பாதையின் சமன்பாடு.

$$\text{ஆரை முடுக்கம்} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\dot{r} = \lambda r$$

$$\therefore \quad \ddot{r} = \lambda\dot{r} = \lambda^2 r$$

$$r\dot{\theta} = \mu\theta$$

$$\therefore \quad \dot{\theta}^2 = \frac{\mu^2\theta^2}{r^2}$$

$$\therefore \quad \text{ஆரை முடுக்கம்} = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r} \qquad \ldots\ldots(5)$$

$$\text{குறுக்கு முடுக்கம்} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{\mu\theta}{r}\right)$$

$$= \frac{\mu}{r}\frac{d}{dt}(r\theta)$$

$$= \frac{\mu}{r}[r\dot{\theta} + \dot{r}\theta]$$

$$= \frac{\mu}{r}[\mu\theta + \lambda r\theta]$$

$$= \mu\theta\left[\frac{\mu}{r} + \lambda\right] \qquad \ldots\ldots(6)$$

3. ஒரு துகள் O எனும் ஆதியில் (origin) இருந்து புறப்பட்டுத் தொடக்கக் கோட்டின் திசையில் $\frac{f}{w}$ எனும் வேகத்துடனும், O-ஐப் பற்றிய சீரான கோணவேகம் w உடனும், எதிர்க்குறியையுடைய சீரான ஆரைமுடுக்கம் $-f$ உடனும் இயங்குகின்றது. ஆரத் திசை வேகத்தின் வளர்ச்சி வீதம் (rate of growth) எப்போதும் நேர்க்குறி உடைத்ததாக இல்லையென்றும், ஆனால் பூச்சியத்தை அணுகக்கூடு மென்றும் காட்டுக.

துகளின் பாதையின் சமன்பாடு

$$rw^2 = f(1-e^{-\theta})$$

எனவும் காட்டுக.

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -f \qquad \text{......(1)}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = w \qquad \text{......(2)}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2r}{dt^2} - rw^2 = -f$$

$2\frac{dr}{dt}$ ஆல் பெருக்கித் தொகைக்கெழு காண,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r^2w^2 = -2fr + A \qquad \text{......(3)}$$

தொடக்கத்தில்

$$\frac{dr}{dt} = \frac{f}{w}, \quad r = 0$$

$$\therefore \quad \frac{f^2}{w^2} - 0 = 0 + A$$

$$\therefore \quad A = \frac{f^2}{w^2}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r^2w^2 = -2fr + \frac{f^2}{w^2}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(rw - \frac{f}{w}\right)^2$$

$$\therefore \quad \frac{dr}{dt} = rw - \frac{f}{w} \text{ அல்லது } \frac{f}{w} - rw \qquad \text{......(4)}$$

ஆனால் தொடக்க நிலையில்

$$\frac{dr}{dt} = \frac{f}{w} \quad (r = 0)$$

ஆகவே,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{f}{w} - wr \qquad \text{......(5)}$$

மட்டுமே எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

$$\therefore \quad \frac{dr}{\frac{f}{w} - wr} = dt$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{w} \log\left(\frac{f}{w} - wr\right) = t + B \qquad \text{......(6)}$$

தொடக்க நிலையில்

$$t = 0 \quad r = 0$$

$$\therefore \quad B = -\frac{1}{w} \log \frac{f}{w}$$

(6)-ல் பிரதியீடு செய்ய,

$$-\frac{1}{w} \log\left(\frac{f}{w} - rw\right) = t - \frac{1}{w} \log \frac{f}{w}$$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{w} \log \frac{\frac{f}{w}}{\frac{f}{w} - rw}$$

$$\therefore \quad e^{-wt} = \frac{\frac{f}{w} - rw}{\frac{f}{w}}$$

$$= 1 - \frac{rw^2}{f}$$

$$\therefore \quad rw^2 = f(1 - e^{-wt}) \qquad \text{......(7)}$$

ஆனால்

$$\frac{d\theta}{dt} = w$$

$$\therefore \quad \theta = wt + C$$

$t=0$ எனில் $\theta=0$ (தொடக்க நிலையில்)

$\therefore \ C = 0$

$\therefore \ \theta = wt$ ......(8)

எனவே சமன்பாடுகள் (7), (8)-ல் இருந்து, துகளின் பாதை

$$rw^2 = f\,(1-e^{-\theta}) \quad \text{......(9)}$$

திசைவேகத்தின் வளர்ச்சி வீதம் $= \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dr}{dt}\right)$

$= \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{f}{w} - rw\right]$ [(5)-ல் இருந்து]

$= -w\dfrac{dr}{dt}$

$= -w\left[\dfrac{f}{w} - rw\right]$

$= -f + rw^2$

$= -f + f\,(1-e^{-\theta})$ [(9)-ல் இருந்து]

$= -fe^{-\theta}$

< 0

மேலும்

$t \to \infty$ எனில் $\theta \to \infty$

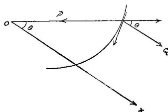
$\therefore -fe^{-\theta} \to 0$

ஆகவே ஆரைத் திசைவேகத்தின் வளர்ச்சி வீதம் பூச்சியத்தை அணுகுகின்றது.

4. m திணிவுவுடைய ஒரு பொருள், P எனும் மைய விசையுடனும், தொடக்கக் கோட்டின் நேர்த் திசையில் Q எனும் விசையுடனும், $r = a\ (1+\cos\theta)$ எனும் வளைவின்மீது இயங்குகிறது. மையப் புள்ளியைப் பற்றிய கோணவேகம் மாறு மதிப்பான w எனில், P, Q-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி. துகளின் இயக்க ஆற்றல் $\dfrac{a\,(2P+3Q)}{8}$ எனவும் நிறுவுக.

OX-க்கு இணையாகவுள்ள Q-ஐப் பிரிக்க,

ஆரைத் திசையில் விசைகள் $= Q\cos\theta - P$



படம் 102.

குறுக்குத் திசையில் விசைகள் $= Q \sin \theta$ (θ குறையும் போக்கில்) ஆகவே இத் திசைகளில் சமன்பாட்டை எழுத,

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) = Q \cos \theta - P \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = -Q \sin \theta \qquad \ldots\ldots(2)$$

ஆனால் $\dot{\theta} = w$

$$r = a\,(1+\cos\theta)$$

$$\therefore\ \dot{r} = -a \sin\theta \,.\, \dot{\theta}$$

$$= -aw \sin\theta$$

$$\ddot{r} = -aw \cos\theta \,.\, \dot{\theta}$$

$$= -aw^2 \cos\theta$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ல் இருந்து,

$$Q \cos\theta - P = m\,[-aw^2 \cos\theta - a(1+\cos\theta)\,w^2]$$

$$= -maw^2\,(1+2\cos\theta) \quad \ldots\ldots(3)$$

$$-Q \sin\theta = m \,.\, \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\,(r^2 w)$$

$$= m \cdot 2w\dot{r}$$

$$= -2mw \,.\, aw \sin\theta$$

$$\therefore\ Q = 2maw^2 \qquad \ldots\ldots(4)$$

(3), (4)-ல் இருந்து,

$$P = Q\cos\theta + maw^2(1+2\cos\theta)$$
$$= 2\,maw^2\cos\theta + maw^2(\,+2\cos\theta)$$
$$= maw^2(1+4\cos\theta) \qquad \text{......(5)}$$

துகளின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv^2$

$$= \tfrac{1}{2}m[\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2]$$
$$= \tfrac{1}{2}m[a^2w^2\sin^2\theta + a^2w^2(1+\cos\theta)^2]$$
$$= \tfrac{1}{2}ma^2w^2[\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2]$$
$$= ma^2w^2(1+\cos\theta) \qquad \text{......(6)}$$

$$\frac{2P+3Q}{8} = \frac{2\,maw^2(1+4\cos\theta)+3\times 2\,maw^2}{8}$$
$$= \frac{maw^2[2+8\cos\theta+6]}{8}$$
$$= maw^2[1+\cos\theta] \qquad \text{......(7)}$$

எனவே, (6), (7)-ல் இருந்து,

$$a\left[\frac{2P+3Q}{8}\right] = ma^2w^2(1+\cos\theta) = \text{இ.ஆ.}$$

$\therefore$ துகளின் இயக்க ஆற்றல் $= a\left[\frac{2P+3Q}{8}\right]$.

5. ஒரு நேரான, வழுவழுப்பான குழல், குழலின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை நிலையாகக்கொண்டு, கிடைதள மட்டத்தில் ω எனும் சீரான கோணவேகத்தோடு சுழல்கின்றது. தொடக்க நேரத்தில், குழலுக்குள் வைக்கப்பட்டிருக்கும் ஒரு துகள், நிலையான புள்ளியில் இருந்து a தூரத்தில் உள்ளது. t நேரத்திற்குப் பிறகு அதன் தூரம் $a\cosh wt$ ஆக இருக்கும் எனக் காட்டு. அப்பொழுது குழல், துகளின்மீது செலுத்தும் அழுத்தத்தையும் கண்டுபிடி.

O என்பது குழலின் நிலையான புள்ளியையும், P துகள், t நேரத்தில் இருக்கும் இடத்தையும் குறிக்கட்டும்.

குழல், கிடைதளத்தில் சுற்றுவதால், அதன் மீது OP-க்குச் செங்குத்தாகச் செயற்படும் (குழலின்) துகளின்மீதான அழுத்தமான R மட்டுமே ஆகும்.

ஆகவே, துகளின் திணிவு m எனில்,

ஆரை முடுக்கம் $= 0$

குறுக்கு முடுக்கம் $= \frac{R}{m}$

$$\therefore \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0 \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{R}{m} \qquad \ldots\ldots(2)$$

$\frac{d\theta}{dt} = w$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறு எண்)

ஆகவே (1), (2) சமன்பாடுகளில் இருந்து

$$\frac{d^2r}{dt^2} = rw^2 \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$R = 2mw\frac{dr}{dt} \qquad \ldots\ldots(4)$$

(3)-ன் இரு பக்கங்களையும் $2\frac{dr}{dt}$ ஆல் பெருக்கித் தொகைக் கெழு காண,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = w^2r^2 + A \qquad \ldots\ldots(5)$$

தொடக்க நிலையில் $r = a$; $\frac{dr}{dt} = 0$

$$\therefore A = -w^2a^2$$

(5)-ஐ எழுத, $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = w^2r^2 - w^2a^2$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = w\sqrt{r^2 - a^2} \qquad \ldots\ldots(6)$$

$$\frac{dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} = w\,dt$$

$$\therefore \cosh^{-1}\frac{r}{a} = wt + B \qquad \ldots\ldots(7)$$

தொடக்கத்தில்

$t = 0$ எனும்போது $r = a$

$\therefore \cosh^{-1} 1 = 0 + B. \qquad \therefore B = 0$

$$\therefore \cosh^{-1}\frac{r}{a} = wt$$

$$\therefore \boldsymbol{r = a\cosh wt}$$

மேலும் சமன்பாடு (4)-ல் இருந்து

$$R = 2mw\,\frac{dr}{dt}$$

$$= 2mw\ aw\ \sinh wt$$

$$\mathbf{R = 2amw^2 \sinh wt}$$

6. ஒரு துகள், மைய விசை இயக்கத்தில்,

$$r^n = A\cos n\theta + B\sin n\theta$$

எனும் பாதையில் செல்கின்றது. அதன் மைய விசை என்ன?

முதலில்

$$r^n = A\cos n\theta + B\sin n\theta$$

என்பதை

$$r^n = a^n\cos(n\theta - \alpha)$$

என்ற உருவில் எழுதுவோம்

$$A = a^n\cos\alpha$$

$$B = a^n\sin\alpha$$

என்று பிரதியீடு செய்ய

$$r^n = a^n[\cos\alpha\cos n\theta + \sin\alpha\sin n\theta]$$

$$r^n = a^n\cos(n\theta - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

இங்கு

$$a^{2n} = A^2 + B^2$$

$$\tan\alpha = \frac{B}{A}$$

$$\therefore\ \frac{1}{u^n} = a^n\cos(n\theta - \alpha)$$

$$-n\log u = \log a^n + \log\cos(n\theta - \alpha)$$

$$-\frac{n}{u}\frac{du}{d\theta} = \frac{-n\sin(n\theta - \alpha)}{\cos(n\theta - \alpha)}$$

$$\therefore\ \frac{du}{d\theta} = u\,.\tan(n\theta - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{du}{d\theta}\tan(n\theta - \alpha) + nu\sec^2(n\theta - \alpha)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = u\tan^2(n\theta - \alpha) + nu\sec^2(n\theta - \alpha)\ldots(3)$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2}+u = u\,[1+\tan^2(n\theta-\alpha)]+nu\sec^2(n\theta-\alpha)$$
$$= (n+1)u\sec^2(n\theta-\alpha)$$
$$= (n+1)u\,.\,a^{2n}u^{2n} \quad \left[\because \frac{1}{u^n}=a^n\cos(n\theta-\alpha)\right]$$

பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{F}{h^2u^2}$$
$$\therefore (n+1)ua^{2n}u^{2n} = \frac{F}{h^2u^2}$$
$$\therefore F = (n+1)u\,.\,a^{2n}u^{2n}h^2u^2$$
$$= (n+1)h^2a^{2n}u^{2n+3}$$
$$\therefore F \propto \frac{1}{r^{2n+3}}$$

7. $r^n=a^n\cos n\theta$ எனும் பாதையில் இயங்கும் துகளுக்கு, விசை மையத்தை நோக்கி, அதன் முடுக்கச் சக்தி என்ன?

மைய ஒழுக்கின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{F}{h^2u^2} \qquad \text{.........(1)}$$
$$r^n = a^n\cos n\theta$$
$$\therefore u^na^n\cos n\theta = 1 \qquad \text{.........(2)} \qquad \left(\because r=\frac{1}{u}\right)$$

இரு பக்கமும் லாக்ரிதம் எடுக்க, (மடக்கை காண)

$$n\log u+n\log a+\log\cos n\theta=0 \text{.........(3)}$$

வகையீடு காண

$$n\frac{1}{u}\frac{du}{d\theta}-\frac{n\sin n\theta}{\cos n\theta}=0$$
$$\therefore \frac{du}{d\theta} = u\tan n\theta \qquad \text{.........(4)}$$

மறுபடியும் வகையீடு காண

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = un\sec^2 n\theta+\tan n\theta\,.\,\frac{du}{d\theta}$$
$$= nu\sec^2 n\theta+u\,.\,\tan^2 n\theta$$

∴ (1)-ல் இருந்து,

$$\frac{F}{h^2u^2} = u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = u + nu\sec^2 n\theta + u\tan^2 n\theta$$

$$= u(n+1)\sec^2 n\theta$$

$$= u(n+1)(a^n u^n)^2$$

$$= (n+1)\, a^{2n} u^{2n+1}$$

$$\therefore F = (n+1)\, a^{2n} h^2 u^{2n+3}$$

$$= \frac{(n+1)\, a^{2n} h^2}{r^{2n+3}}$$

$$\boxed{\therefore F \propto \frac{1}{r^{2n+3}}}$$

குறிப்பு :

(i) $n = 1$ எனில், $r = a\cos\theta$, இது ஒரு வட்டம்

$$P \propto \frac{1}{r^5}$$

(ii) $n = \frac{1}{2}$ எனில், $r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\theta}{2}$, இது ஓர் இதய உரு

$$P \propto \frac{1}{r^4}$$

(iii) $n = -\frac{1}{2}$ எனில்,

$$r^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{\theta}{2}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\theta}{2}$$

$$r = \frac{a}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2a}{1+\cos}$$

$$\therefore \frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta$$

இது ஒரு பரவளைவு.

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

(iv) $n = -2$ எனில்,

$$r^{-2} = a^{-2} \cos 2\theta$$

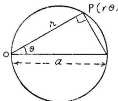
$$r^2 \cos 2\theta = a^2$$

இது ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு.

$$F = (-1)\, a^{-4}\, h^2 r \qquad F \propto -r$$

F-ன் இந்த எதிர்க்குறி, துகள் விசை மையத்திற்கு எதிர்த் திசையில் இயங்குகின்றது என்பதைக் காட்டுகின்றது.

8. ஒரு துகள், ஆதியை வட்டத்தின்மேல் உள்ளவாறு அமைந்த வட்டப்பாதையில் இயங்குகின்றது. அதன் முடுக்கச் சக்தி என்ன?



படம் 103.

a, வட்டத்தின் விட்டமெனில், பாதையின் சமன்பாடு,

$$r = a \cos\theta \qquad \text{......(1)}$$

$$\therefore \frac{1}{u} = a \cos\theta$$

$$au \cos\theta = 1$$

$$\log a + \log u + \log \cos\theta = 0$$

வகையீடு காண,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{d\theta} - \tan\theta = 0$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = u \tan\theta \qquad \text{......(2)}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = u \sec^2\theta + u \tan^2\theta \qquad \text{......(3)}$$

மைய ஒழுக்கின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் பிரதியீடு செய்ய,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{F}{h^2u^2}$$

$$u \sec^2\theta+u\tan^2\theta+u = \frac{F}{h^2u^2}$$

$$2u\sec^2\theta = \frac{F}{h^2u^2}$$

$$2a^2u^3 = \frac{F}{h^2u^2}$$

$$\therefore F = 2a^2h^2u^5$$

$$\boxed{\therefore F \propto \frac{1}{r^5}}$$

9. ஒரு துகள் மைய விசையின் கீழ், $r=e^\theta$ எனும் பாதையில் இயங்குகின்றது. விசையின் மதிப்பு $\frac{2mh^2}{r^3}$ எனவும், துகளின் வேகம் $\frac{h}{r}\sqrt{2}$ எனவும் நிறுவுக.

மைய ஒழுக்கின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{F}{h^2u^2} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

F என்பது மைய முடுக்கம்.

$$r = e^\theta$$

$$\frac{1}{u} = e^\theta$$

$$ue^\theta = 1$$

$$\therefore \log u+\theta = 0$$

வகையீடு காண,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{d\theta}+1 = 0$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = -u \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{du}{d\theta}=u \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியீடு செய்ய

$$u+u = \frac{F}{h^2u^2}$$

$$\therefore F = 2h^2u^3$$

$$\therefore \text{மைய விசையின் மதிப்பு} = \frac{2mh^2}{r^3} \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$\text{திசை வேகம் } v = \frac{h}{p}$$

$$\frac{1}{p^2} = u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

$$= u^2+u^2$$

$$\therefore v^2 = \frac{h^2}{p^2} = 2h^2u^2$$

$$\boxed{\therefore v = \frac{h}{r}\sqrt{2}} \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

10. ஒரு பரவளைவுப் பாதையின் $p-r$ சமன்பாடு, (குவியத்தை முனைவாகக் கொண்டால்) $p^2=ar$. பாதையின் மைய விசையைக் காண்க.

F மைய முடுக்கம் எனில்,

$$F = \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} \quad \dots\dots(1)$$

$$p^2 = ar$$

$$2p\ dp = a\ dr$$

$$\therefore \frac{dp}{dr} = \frac{a}{2p} \quad \dots\dots(2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ல் இருந்து

$$F = \frac{h^2}{p^3}\cdot\frac{a}{2p}$$

$$= \frac{ah^2}{2p^4}$$

$$= \frac{ah^2}{2a^2r^2}$$

$$= \frac{h^2}{2ar^2}$$

$$\therefore F \propto \frac{1}{r^2}$$

11. ஒரு துகள், ஓர் மைய நோக்கு விசையின் கீழ் ஒரு வளைவரையில் வருகின்றது. வளைவரையின் எந்தப் புள்ளியிலும் அதன் திசைவேகம், அதே முடுக்கத்தின் இயல்பினுல் அதே அளவு தூரத்தில் அமைந்த வட்டப்பாதையில் உள்ள திசைவேகத்திற்குச் சமமெனில், ஒழுக்கு ஒரு சமகோணச் சுருளாக அமையும் எனக் காட்டுக. விசையின் விதியையும் காண்க.

மையநோக்கு முடுக்கம் $= F$ என்க.

r தூரத்தில், F எனும் லம்ப முடுக்கத்தோடு இயங்கும் வட்டப் பாதையில், திசைவேகம் v எனில்,

$$\frac{v^2}{r} = F$$

$$v^2 = Fr \qquad \ldots\ldots(1)$$

v என்பது மைய ஒழுக்கிலும், திசைவேகமாதலால்

$$pv = h$$

$$v = \frac{h}{p} \qquad \ldots\ldots(2)$$

(2)ஐ, (1)-ல் பிரதியீடு செய்ய,

$$\frac{h^2}{p^2} = Fr$$

ஆனுல்

$$F = \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$\therefore \frac{h^2}{p^2} = \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}.r$$

$$\therefore \frac{dr}{r} = \frac{dp}{p}$$

தொகைக் கெழு காண,

$$\log r + \log A = \log p$$

$$\therefore Ar = p$$

மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு

$$p = Ar \qquad \ldots\ldots(4)$$

இது ஒரு சமகோணச் சுருளின் சமன்பாடு.

சமன்பாடு 4-ல் இருந்து,

$$\frac{dp}{dr} = A$$

இதை 3-ல் பிரதியிட

$$F = \frac{h^2}{p^3}A$$
$$= \frac{Ah^2}{A^3r^3} \quad (\because p = Ar)$$
$$= \frac{h^2}{A^2}\cdot\left(\frac{1}{r^3}\right)$$
$$\therefore \quad F \propto \frac{1}{r^3}$$

12. m திணிவுடைய ஒரு துகள், ஒரு மைய விசையின் கீழ் இயங்குகின்றது. மைய விசை $m\mu\ [3au^4 - 2(a^2-b^2)u^5]$, $(a>b)$. துகள் $(a+b)$ தூரத்தில் உள்ள கவியத்தில் இருந்து, $\frac{\sqrt{\mu}}{a+b}$ எனும் திசை வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு,

$$r = a + b\cos\theta$$

எனக் காட்டுக.

விசை, மையவிசை ஆதலால்,

$$vp = h \quad [\text{மாறு எண்}] \qquad \ldots\ldots(1)$$

கவியத்தில், குறிப்பாக

$$v = \frac{\sqrt{\mu}}{a+b};\ p = a+b$$

எனவே,

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a+b}\cdot(a+b) = h$$

$$\boxed{\therefore \quad h^2 = \mu} \qquad \ldots\ldots(2)$$

பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu\,[3au^4 - 2(a^2-b^2)u^5]}{\mu u^2}$$
$$= 3au^2 - 2(a^2-b^2)u^3 \qquad \ldots\ldots(3)$$

சமன்பாடு (3)-ஐ $2\frac{du}{d\theta}$ ஆல் பெருக்கி, θ-ஐப் பொருத்துத் தொகைப்படுத்த,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = 2au^3 - (a^2-b^2)u^4 + B \qquad \ldots\ldots(4)$$

இங்கு B ஒரு மாறு எண்.

கவியத்தில்,

$$u = \frac{1}{a+b}; \quad \frac{du}{d\theta} = 0$$

$$\therefore \quad 0 + \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{2a}{(a+b)^3} - \frac{(a^2-b^2)}{(a+b)^4} + B$$

$$\therefore \quad B = 0$$

ஆகவே,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = 2au^3 - (a^2-b^2)u^4 - u^2$$

$u = \frac{1}{r}$ எனப் பிரதியீடு செய்து, r^4-ஆல் பெருக்க,

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 2ar - r^2 - (a^2-b^2) \qquad \text{......(5)}$$

$$\therefore \pm \frac{dr}{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} = d\theta$$

எதிர்க் குறியை எடுத்துக்கொண்டு தொகைப்படுத்த,

$$\cos^{-1}\left(\frac{r-a}{b}\right) = \theta + A$$

$$r = a + b\cos(\theta + A)$$

இங்கு A ஒரு மாறு எண்.

கவியக் கோட்டை, தொடக்கக் கோடாகக் கொண்டால்,

$$r = a+b, \ \theta = 0$$

$$\therefore \quad A = 0$$

ஆகவே, மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு

$$\boxed{r = a + b\cos\theta}$$

கந்தழிப் புள்ளியில் இருந்து அடையும் திசைவேகம்

ஒரு மைய ஒழுக்கின், ஒரு புள்ளியில், கந்தழிப் புள்ளியில் இருந்து அடையும் திசைவேகம் என்று குறிப்பிடும்போது, துகள் கந்தழிப் புள்ளியில் (ஓய்வு நிலையில்) இருந்து கொடுக்கப்பட்ட முடுக்கத்தின் கீழ் அப்புள்ளிக்கு விழும்போது, அடையும் திசை வேகத்தைக் குறிக்கும்.

உதாரணமாக, மைய முடுக்கம் $\frac{\mu}{r^2}$ எனில்

$$a = v\frac{dv}{dr} = -\frac{\mu}{r^2}$$ [மையத்தை நோக்கி இருப்பதால், எதிர்க்குறி]

$$v\,dv = -\frac{\mu}{r^2}\,dr$$

$r = \infty$ எனும்போது $v = 0$

$r = a$ எனும்போது திசை முடுக்கம் V எனில்,

$$\int_0^V v\,dv = \int_\infty^a -\frac{\mu}{r^2}\,dr$$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{\mu}{a}$$

$$V^2 = \frac{2\mu}{a}$$

பொதுவாக, மைய முடுக்கம் F எனில்,

$$\tfrac{1}{2}v^2 = -\int_\infty^r F\,dr$$

13. ஒரு துகள் μr^{-7} எனும் மைய முடுக்கத்துடன் இயங்குகின்றது. அது a தூரத்தில் அமைந்துள்ள ஒரு கவியப்புள்ளியில் இருந்து, கந்தழிப் புள்ளியில் இருந்து பெறக்கூடிய திசைவேகத்துடன் துவக்கப்பட்டால், பாதையின் சமன்பாடு

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

எனக் காட்டுக.

இங்கு மைய முடுக்கம் $F = \mu r^{-7} = \mu u^7$

∴ பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu u^7}{h^2u^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu u^5}{h^2} \qquad \ldots\ldots(1)$$

கந்தழிப் புள்ளியில் இருந்து பெறக்கூடிய திசைவேகம் V எனில்,

$$\frac{V^2}{2} = -\int_\infty^a F\,dr$$

$$= -\int_{\infty}^{a} \frac{\mu}{r^7}\, dr$$

$$= \frac{\mu}{6a^6}$$

$$\therefore \quad V^2 = \frac{\mu}{3a^6} \qquad \text{......(2)}$$

(V தொடக்கத் திசைவேகம்)

விசை மையத்தில் இருந்து, தொடக்க வேகத்தின் திசைக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p எனில்,

$$h = pv = p_0 v_0$$ (மாரு மதிப்புடையதாகையால்)

இங்குக் கவியப்புள்ளியே எறிதானம் ஆனதால்,

$$p_0 = a$$

$$\therefore \quad h^2 = a^2 \frac{\mu}{3a^6}$$

$$h^2 = \frac{\mu}{3a^4} \qquad \text{......(3)}$$

ஆகவே சமன்பாடு (1)-ல், h^2-க்குப் பிரதியீடு செய்ய,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3a^4u^5 \qquad \text{......(4)}$$

(4)-ன் இரு பக்கங்களையும் $2\frac{du}{d\theta}$ ஆல் பெருக்கி, θ-ஆல் தொகைக்கெழு காண

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = a^4u^6 + A \qquad \text{......(5)}$$

தொடக்க நிலையில், எறிதானம் கவியப்புள்ளி ஆதலால்

$$\frac{du}{d\theta} = 0$$

மேலும் $u = \frac{1}{a}$

$$\therefore\ 0 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} + A$$

$$\therefore\ A = 0$$

ஆகவே (5)-ல், A-இன் மதிப்பைப் பிரதியீடு செய்ய

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = a^4u^6 \qquad \text{......(6)}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2(a^4u^4-1)$$

$$\frac{du}{d\theta} = u\sqrt{a^4u^4-1} \qquad \text{......(7)}$$

$$\therefore\ -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a^4}{r^4}-1}$$

$$\frac{-r\,dr}{\sqrt{a^4-r^4}} = d\theta$$

$$\therefore\ \cos^{-1}\frac{r^2}{a^2} = 2\theta + 2B \qquad \text{......(8)}$$

தொடக்கத்தில் θ-ன் மதிப்பைக் கவியக்கோட்டில் இருந்து அளப்போமெனில்,

$r = a$ எனும்போது $\theta = 0$

$\therefore\ \cos 2B = 1 \qquad \therefore\ B = 0$

எனவே, மைய ஒழுக்கு

$$\cos^{-1}\frac{r^2}{a^2} = 2\theta$$

$$r^2 = a^2\cos 2\theta$$

14. ஒரு துகளின் மைய முடுக்கம் μu^5. அது a தூரத்தில் உள்ள கவியப்புள்ளியில் இருந்து ஏவப்படுகிறது. அதன் திசை வேகம், அதே அளவு ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில்' உள்ள திசை வேகத்தின் ஐந்து மடங்கு எனில், மற்றொரு கவியத்தூரத்தைக் காண்க.

இங்கு மைய முடுக்கம் $F = \mu u^5$

பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu u^3}{h^2} \qquad \text{......(1)}$$

துகளின் தொடக்கத் திசை வேகம் v_o என்போம்.

a ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில் திசை வேகம் V எனில்,

$$\frac{V^2}{a} = \text{முடுக்கம்} = \frac{\mu}{a^5}$$

$$\therefore\ V^2 = \frac{\mu}{a^4}$$

$$v_0 = 5V$$

$$\therefore\ v_0^2 = \frac{25\mu}{a^4} \qquad \text{......(2)}$$

விசை மையத்தில் இருந்து தொடக்க வேகத்தின் திசைக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p எனில்

$$h = pv = p_0 v_0$$

இங்குக் கவியப்புள்ளியே எறிதானம் ஆனதால், $p_0 = a$

$$\therefore\ h^2 = \frac{a^2 . 25\mu}{a^4}$$

$$h^2 = \frac{25\mu}{a^2} \qquad \text{......(3)}$$

ஆகவே சமன்பாடு (1)-ல் h^2-க்குப் பிரதியீடு செய்ய

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{a^2u^3}{25} \qquad \text{......(4)}$$

(4)-ன் இரு பக்கங்களையும் $2\frac{du}{d\theta}$ ஆல் பெருக்கி, θ-ஐப் பற்றிய தொகைக்கெழு காண

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{a^2u^4}{50} + A \qquad \text{......(5)}$$

தொடக்க நிலையில், எறிதானம் கவியப்புள்ளி ஆனதால்,

$$\frac{du}{d\theta} = 0$$

$$\text{மேலும் } u = \frac{1}{a}$$

$$\therefore\ 0 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{50\,a^2} + A$$

$$\therefore\ A = \frac{49}{50\,a^2}$$

(5)-ல், A-ன் மதிப்பைப் பிரதியீடு செய்ய

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{a^2u^4}{50} + \frac{49}{50a^2} \qquad \text{......(6)}$$

கவியத் தூரங்களைப் பெற $\frac{du}{d\theta} = 0$ என (6)-ல் பிரதியீடு செய்ய

$$u^2 = \frac{a^2u^4}{50} + \frac{49}{50a^2}$$

$$a^4u^4 - 50a^2u^2 + 49 = 0$$

$$(a^2u^2 - 1)(a^2u^2 - 49) = 0$$

$$\therefore\ a^2u^2 = 1 \qquad au = 1$$

அல்லது $a^2u^2 = 49 \qquad au = 7$

ஆகவே,

$u = \frac{1}{a}$ அல்லது $u = \frac{7}{a}$

$r = a$ எறிதானத்தைக் குறிக்கின்றது.

ஆகவே, $\boxed{r = \frac{a}{7}}$ மற்றெரு கவியத் தூரத்தைக் கொடுக்கின்றது.

15. m திணிவுள்ள ஒரு துகள், $\frac{m\mu}{r^3}$ எனும் மைய நோக்கு விசையுடன், விசை மையத்திலிருந்து a தூரத்தில் உள்ள புள்ளியில் இருந்து, ஆரத்துடன் $\frac{\pi}{4}$ கோணம் உண்டாக்கும் திசையில் ஏவப்படு கிறது. அதன் தொடக்க வேகம் $\sqrt{\mu}/a$ எனில், மைய ஒழுக்கின் சமன் பாட்டைக் காண்க.

மைய முடுக்கம், $F = \frac{\mu}{r^3} = \mu u^3$

பாதையின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu u}{h^2} \qquad \text{......(1)}$$

விசை மையத்தில் இருந்து, தொடக்க வேகத்தின் திசைக்கு வரையப் பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p எனில்,

$$h = pv = p_o v_o$$

இங்கு

$$r_o = a$$

ϕ எனும் கோணம், தொடக்க நிலை ஆரத்திற்கும், திசை வேகத்திற்கும் இடையே உள்ள கோணம் எனில்

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

$$p_\circ = r_\circ \sin \phi$$

$$p_\circ = r_\circ \sin \frac{\pi}{4}$$

$$p_\circ = \frac{r_\circ}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad \text{......(2)}$$

$$\therefore \quad h^2 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\mu}{a^2}$$

$$h^2 = \frac{\mu}{2} \qquad \text{......(3)}$$

ஆகவே சமன்பாடு (1)-ல், h^2-க்குப் பிரதியீடு செய்ய,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 2u \qquad \text{......(4)}$$

(4)-ன் இரு பக்கங்களையும் $2\frac{du}{d\theta}$ ஆல் பெருக்கி, θ ஆல் தொகைக் கெழு காண,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = 2u^2 + A \qquad \text{......(5)}$$

[குறிப்பு: இங்கு எறிதானம் கவியப் புள்ளி இல்லாததால் $\frac{du}{d\theta} \neq 0$]

ஆனால்,

$$\frac{1}{p^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2$$

என அறிவோம்.

$$\therefore \quad \frac{1}{p^2} = 2u^2 + A$$

தொடக்க நிலையில்,

$$p = p_\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$u = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{2}{a^2} = \frac{2}{a^2} + A$$

$$\therefore \quad A = 0$$

ஆகவே (5)-ல் A-ன் மதிப்பைப் பிரதியீடு செய்ய

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = 2u^2 \qquad \ldots\ldots(6)$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2$$

$$\frac{du}{d\theta} = u \qquad \ldots\ldots(7)$$

$$\therefore \frac{du}{u} = d\theta$$

$$\log u = \theta + B \qquad \ldots\ldots(8)$$

தொடக்க ஆரத்தில் இருந்து, θ-ஐ அளக்க,

$$u = \frac{1}{a} \text{ எனும்போது } \quad \theta = 0$$

$$\therefore \log \frac{1}{a} = B$$

$\therefore$ (8)-ல் பிரதியீடு செய்ய,

$$\log u = \theta + \log \frac{1}{a}$$

$$u = \frac{1}{a} \cdot e^{\theta}$$

$\therefore$ துகளின் பாதை,

$$r = ae^{-\theta}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

முதல் பிரிவு

1. ஒரு துகள் $r = ae^{b\theta}$ எனும் சமகோணச் சுருளின் மீது செல்லுமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் ஆரம் ω எனும் மாருத கோண வேகத்தை உடைத்ததாக இருந்தால், துகளின் திசைவேகக் கூறுகளையும், முடுக்கக் கூறுகளையும் காண்க.

[ஆரத் திசை வேகம் $= ab\omega e^{b\omega t}$
குறுக்குத் திசை வேகம் $= a\omega e^{b\omega t}$
ஆர முடுக்கம் $= a\omega^2 e^{b\omega t}(b^2-1)$
குறுக்கு முடுக்கம் $= 2ab\omega^2 e^{b\omega t}$]

2. ஒரு துகள் $r = ae^{\theta}$ எனும் வளைவரையின் மீது மாருத கோணவேகத்துடன் செல்கின்றது. அதன் ஆரை முடுக்கம் பூச்சியம்

எனவும், குறுக்கு முடுக்கம் முனைவில் இருந்து அதன் தூரத்தின் விகிதத்திலும் இருக்கும் என நிறுவுக.

3. மாறுத வேகம் v-யுடன், ஓர் இதய உருவின் மேல் $[r=a\ (1+\cos\theta)]$ வளையவரும் ஒரு துகளின்

(i) முனைவைச் சார்ந்த கோணவேகம் $w=\dfrac{v\sec\theta/2}{2a}$

எனவும்

(ii) ஆரை முடுக்கக் கூறு மாறுத மதிப்புடையது $\left(=\dfrac{3v^2}{4a}\right)$

எனவும்

(iii) முடுக்கத்தின் விளைவின் மதிப்பு $\dfrac{3vw}{2}$ எனவும் நிறுவுக.

4. மேற்கூறியவாறு இதய உருவின் மேல் அமைந்த துகளின் கோணவேகமும், முடுக்கத்தின் மதிப்பும் $r^{-\frac{1}{2}}$-க்கு நேர் விகிதத்தில் அமைந்துள்ளன எனக் காட்டுக.

5. a எனும் அளவு ஆரமுடைய ஒரு வட்டப்பாதையில், ஒரு துகள், பாதையின் மேல் உள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியைச் சார்ந்த கோணவேகம் மாறுதம திப்பான w-ஐ உடைத்ததாய்ச் சுற்றி வருகிறது. பாதையின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் துகள் $4aw^2$ எனும் முடுக்கத்தைக் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

$[r = 2a\cos\theta$ எனக் கொள்க.$]$

6. சீரானவேகம் u-டன், ஒரு துகள், c ஆரமுடைய ஒரு வட்டப் பாதையில் வளைய வருகிறது. அதன் ஆரை, குறுக்கு முடுக்கங்கள் முறையே

$$-\frac{u^2}{c}\cos\theta,\ -\frac{u^2}{c}\sin\theta$$

எனக் காட்டுக.

7. $r=2a\sin\theta$ என்ற சமன்பாட்டையுடைய வட்டப்பாதையில், ஒரு துகள் $k\ \text{cosec}^2\ \theta$ எனும் வேகத்துடன் செல்கின்றது. அதன் முடுக்கம் முழுதும் துகளையும், முனைவையும் சேர்க்கும் கோட்டின் மேலேயே அமையும் எனக் காட்டுக.

8. முனைவை நோக்கிய முடுக்கம் எப்போதும் பூச்சியம் உள்ள வாறு $r=2a\cos\theta$ எனும் வட்டப்பாதையில் ஒரு துகள் செல்கின்றது. அதன் கோண வேகம் w எனில்,

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} = -2\omega^2 \cot\theta$$

எனவும், குறுக்கு முடுக்கம் $\text{cosec}^5\theta$-க்கு நேர்விகிதத்தில் உள்ளது எனவும் நிறுவுக.

9. ஒரு துகள் சீரானவேகத்துடன் ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் செல்கின்றது. P எனும் நிலையில் துகள் இருக்கும்போது, S என்ற அதன் குவியத்தைச் சார்ந்த கோணவேகம் $(SP)^{\frac{3}{2}}$ எனக் காட்டுக.

10. பரவளைவுப் பாதையில் செல்லும் ஒரு துகளுக்கு, குவியத்தின் வழியே செல்லும் ஆரத்திற்குக் குத்துத் திசையில், திசை வேகக் கூறு மாறாத மதிப்புடையது எனில், துகளின் முடுக்கத்தின் மதிப்பும் மாறா மதிப்புடையது என நிறுவுக.

11. ஒரு துகளின் பாதை $r = a \tan\theta$. அதன் முடுக்கம் முனையை நோக்கி இருந்தால், $\left(h = r^2\dfrac{d\theta}{dt} \text{ எனில்}\right)$, முடுக்கம் $\dfrac{h^2}{r^3}\left[3 + \dfrac{2a^2}{r^2}\right]$ எனக் காட்டுக.

12. ஒரு தளத்தில் அமைந்த துகளுக்கு, அத் தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய கோணவேகம் நிலையானது எனில், அதன் குறுக்கு முடுக்கக் கூறு, ஆரத் திசைவேகக் கூற்றிற்கு நேர்விகிதத்தில் அமையும் என நிறுவுக.

13. 'a' எனும் ஆரமுடைய வண்டிச் சக்கரத்தின் மையப்புள்ளியில் புறப்பட்டு, u எனும் நிலையான வேகத்துடன் ஒரு குறுக்குச் சட்டத்தின் மீது ஒரு பூச்சி ஊர்ந்து செல்கிறது. வண்டியின் வேகம் v எனில், குறுக்குச் சட்டத்திற்குக் குத்தாகவும், அதன் வழியேயும் ஆன அதன் முடுக்கக் கூறுகள் என்ன?

$$\left[\text{குறிப்பு: } \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{a};\ \frac{dr}{dt} = u\right]\left(\text{விடை: } -r\frac{v^2}{a^2},\ \frac{2uv}{a}\right)$$

14. ஒரு துகளின் ஆரை, குறுக்குத் திசைக்கூறுகள் முறையே $2\lambda a\theta$, λr. இத் திசைகளில் முடுக்கக்கூறுகள் முறையே $(2a - r)\lambda^2$, $4a\theta\lambda^2$ எனவும், அதன் பாதை $r = a\theta^2 + C$ எனவும் நிறுவுக. (λ, μ மாறா எண்கள் எனக் கொள்க.)

15. ஒரு துகளின் ஆரை, குறுக்குத் திசைக்கூறுகள் λr^2, $\mu\theta^2$. (இங்கும் λ, μ மாறா எண்கள்) துகளின் பாதை

$$\frac{\lambda}{\theta} + C = \frac{\mu}{2r^2}$$

எனக் காட்டு.

அத் திசைகளில் முடுக்கங்கள் முறையே

$$2\lambda^2 r^3 - \frac{\mu^2\theta^4}{r}, \ \mu\left(\lambda r\theta^2 + \frac{2\mu\theta^3}{r}\right)$$

எனவும் காட்டுக.

16. ஒரு துகளின் ஆரைத் திசைவேகம், குறுக்குத் திசைவேகத்தின் k மடங்கு எனில், துகளின் பாதை ஒரு சமகோணச் சுருளில் அமையும் என நிறுவுக.

17. P எனும் ஒரு துகள் இரு நிலையான u, v எனும் திசைவேகங்களைக் கொண்டதாக உள்ளது. முதல் திசைவேகம் ஒரு நிலையான திசையிலும், இரண்டாவது, O எனும் நிலையான புள்ளியில் இருந்து OP-க்கு வரையப்பட்ட ஆரத்திற்குக் குத்தாகவும் அமைந்திருந்தால், துகளின் பாதை O-ஐக் குவியமாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பு வளைவு என்று நிறுவுக.

18. nu என்ற வேகத்துடன் ஓடும் ஓர் ஆற்றின், ஒரு கரையில் A எனும் புள்ளியில் இருந்து u எனும் சீரான வேகத்துடன் புறப்படும் படகு, A-க்கு நேர்க்குத்தாக எதிர்க்கரையில் அமைந்துள்ள B எனும் புள்ளியை நோக்கியே செலுத்தப்படுகிறது. படகு செல்லும் பாதையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

படகின் வேகமும், ஆற்றின் வேகமும் ஒன்ருனல் படகு ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் செல்லும் எனக் காட்டு.

$$\left[r^n(\sec\theta + \tan\theta) = K\sec^n\theta;\ n = 1 \text{ எனில், } \frac{K}{r} = 1 + \sin\theta\right]$$

19. ஒரு துகள் வளைவரை ஒன்றின்மீது சீரான வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கிறது. O எனும் நிலையான ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய அதன் கோணவேகம், O-ல் இருந்து அது உள்ள தூரத்திற்கு எதிர் விகிதத்தில் உள்ளது. வளைவரை O-ஐ முனைவாகக்கொண்ட ஒரு சமகோணச் சுருள் என்று காட்டுக. மேலும் துகளின் முடுக்கம், P-ல் வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் வழியே அமைந்து, OP-க்கு எதிர் விகிதத்தில் அமையும் எனவும் காட்டுக.

20. ஒரு நேரான, வழவழப்பான குழல், அதன் ஒரு முனையை நிலையாகக்கொண்டு கிடைத்தள மட்டத்தில் ω எனும் சீரான கோணவேகத்தோடு சுழல்கின்றது. தொடக்க நேரத்தில், குழலுக்குள் இருக்கும் ஒரு துகள், நிலையான முனையில் இருந்து a தூரத்தில்

V எனும் வேகத்துடன் குழலின் நீளவாட்டில் செல்லுமாறு உள்ளது. t நேரத்தில் அதன் தூரம்

$$a \cosh wt + \frac{V}{w} \sinh wt$$

எனக் காட்டுக.

21. ஒரு நேரான வழவழப்பான குழல், அதன் ஒரு முனையை நிலையாகக் கொண்டு நிலைக் குத்துத்தளத்தில் w எனும் சீரான கோண வேகத்தோடு சுழல்கின்றது. தொடக்க நேரத்தில், கிடைத்தள மட்டத்தில் உள்ள அக் குழலுக்குள் இருக்கும் ஒரு துகள், நிலையான முனையில் இருந்து a தூரத்தில், V எனும் வேகத்துடன் குழலின் நீளவாட்டில் செல்லுமாறு உள்ளது. t நேரத்தில் அதன் தூரம்,

$$a \cosh wt + \left(\frac{V}{w} - \frac{g}{2w^2}\right) \sinh wt + \frac{g}{2w^2} \sin wt$$

எனக் காட்டுக.

22. ஓர் இலேசான, நேராக உள்ள, வழவழப்பான குழல், அதன் O எனும் ஒரு முனையை நிலையாகக் கொண்டு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் w எனும் சீரான வேகத்தோடு மேல் நோக்கிச் சுழல்கின்றது. அது கிடைத்தளமட்டத்தில் உள்ளபோது, அதற்குள் இருக்கும் ஒரு துகள் நிலையான முனையில் இருந்து a தூரத்தில் உள்ளது. w-ன் மதிப்பு சிறியது எனக்கொண்டால், துகள் O-ஐ அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம், ஏறக்குறைய $\left(\frac{6a}{gw}\right)^{\frac{1}{3}}$ எனக் காட்டுக.

23. ஒரு நேரான சொரசொரப்பான குழல், அதன் ஒரு முனையை நிலையாகக் கொண்டு கிடைத்தள மட்டத்தில் w எனும் சீரான கோண வேகத்தோடு சுழல்கின்றது. குழல் சுழல ஆரம்பிக்கும்போது அதற்குள், நிலையான முனையில் இருந்து a தூரத்தில் ஒரு துகள் வைக்கப்படுகிறது. குழலின் உராய்வு எண் λ எனில் t நேரத்தில் துகளின் தூரம்,

$$ae^{-wt \cdot \tan\lambda} \cdot [\cosh (wt \sec \lambda) + \sin\lambda \sinh (wt \sec \lambda)]$$

என நிறுவுக.

இரண்டாம் பிரிவு

1. ஒரு துகள் mF எனும் மையநோக்கு விசையுடன் கீழ்க்கண்ட வளைவரைகளில் இயங்குகின்றது. அவ் விசைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவாறு அமையும் எனக் காட்டுக:

(i) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ $\qquad F \propto \frac{1}{r^7}$

(ii) $r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos \theta/2$ $\quad F \propto \dfrac{1}{r^4}$

(iii) $r = 2a \cos \theta$ $\quad F \propto \dfrac{1}{r^5}$

(iv) $r = a + b \cos \theta$ $\quad F \propto \dfrac{1}{r^4}$

(v) $r = a \sin n\theta$ $\quad F \propto \dfrac{2n^2a^2}{r^5} - \dfrac{n^2-1}{r^3}$

(vi) $r = a \tan \theta$ $\quad F \propto \dfrac{1}{r^3}\left[3 + \dfrac{2a^2}{r^2}\right]$

(vii) $r = a \cot \theta$ $\quad F \propto \dfrac{3}{r^3} + \dfrac{2a^2}{r^5}$

(viii) $r = a \sec^2 \frac{1}{2}\theta$ $\quad F \propto \dfrac{1}{r^2}$

(ix) $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ $\quad F \propto \dfrac{1}{r^3}$

(x) $r = a \cosh n\,\theta$ $\quad F \propto \dfrac{(1+n^2)}{r^3} - \dfrac{2n^2a^2}{r^5}$

(xi) $r^n = A \cos n\theta - B \sin n\theta$ $\quad F \propto \dfrac{1}{r^{2n+3}}$

(xii) $r^n = a^n \sec n\theta$ $\quad F \propto r^{2n-3}$

(xiii) $\dfrac{2a^3}{r^3} = 1 + \cos 3\theta$ $\quad F = \text{Constant}$

(xiv) $a = r \sin n\theta$ $\quad F \propto \dfrac{1}{r^3}$

(xv) $\dfrac{a}{r} = e^{n\theta}$ $\quad F \propto \dfrac{1}{r^3}$

2. $p-r$ சமன்பாடுகளை உபயோகித்துக் கீழ்க்கண்ட வளைவரைகளை அமைக்கும் துகளின் மையநோக்கு விசைகளைக் காண்க :

(i) நீள் வளையம் $\dfrac{b^2}{p^2} = \dfrac{2a}{r} - 1$

(ii) அதிபரவளைவு (பக்கத்துக் கிளை) $\dfrac{b^2}{p^2} = \dfrac{2a}{r} + 1$

(iii) அதிபர வளைவு (தூரத்துக்கிளை) $\dfrac{b^2}{p^2} = \dfrac{2a}{r} - 1$

(iv) சமகோணச் சுருள் $p = r \sin \alpha$

$$\left[\text{(i) } F \propto \frac{1}{r^2} \text{ (ii) } F \propto \frac{1}{r^2} \text{ (iii) } F \propto -\frac{1}{r^2} \text{ (iv) } F \propto \frac{1}{r^3} \right]$$

3. ஒரு துகள், v எனும் சீரான வேகத்துடன், வட்டப்பாதையில் வளைய வருகின்றது. மையப்புள்ளியை நோக்கிய மாரு மதிப்புடைய ஒரு விசையின் கீழ் அது இயங்கக் கூடும் எனக் காட்டுக.

4. மைய ஒழுக்கில் அமையும் ஒரு துகளின் திசைவேகம், அத் துகள் விசை மையத்தில் இருந்து உள்ள தூரத்திற்கு எதிர் விகிதத்தில் உள்ளது. அதன் பாதையைக் காண்க. $[p = kr]$

5. ஒரு மைய ஒழுக்கின் ஏதோ ஒரு புள்ளியில் திசைவேகம், அப் புள்ளிக்கும் விசை மையத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரத்தை ஆரமாகக் கொண்ட வட்டப்பாதையில் இயங்கும்போது உள்ள திசைவேகத்தின் மூன்றில் ஒரு பங்கு. விசையின் விதியைக் காண்க. மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு $r^8 = a^8 \cos 8\theta$ எனவும் காட்டுக. $\left[F \propto \frac{1}{r^{19}} \right]$

6. ஒரு துகள், $r = a\ (1 - \cos \theta)$ எனும் இதய உருவின் மீது, முனைவை நோக்கிய ஒரு விசையின் கீழ் இயங்குகின்றது. விசை, தூரத்தின் நான்கு மடங்கிற்கு எதிர்விகிதத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

$\theta = \pi$ என்ற கவியத்தில், P என்பது விசையாகவும், V என்பது திசைவேகமாகவும் ஆனல் $3V^2 = 4aP$ எனவும் காட்டுக.

7. ஒரு துகளின் இயக்கம் t எனும் நேரத்தில்,

$$x = at^2$$

$$y = \frac{b}{t}$$

எனும் சமன்பாடுகளால் கொடுக்கப்படுகிறது. அதன் பரப்பளவு வேகம் மாருத மதிப்புடையது எனக் காட்டுக. அதன் பாதையின் ஒவ்வோர் இடத்திலும் ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கி அதன் முடுக்கம் $\frac{2r}{t^2}$ எனவும் காட்டுக. [r என்பது இங்கு நகரும் துகளுக்கும் நிலையான புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தூரத்தைக் குறிக்கிறது].

8. ஓர் ஒழுக்கில் (orbit) சென்றுகொண்டிருக்கும் துகளின் ஆரம், சமகாலத்தில் சமமான பரப்பளவைக் கவர்ந்து சென்ருல், துகளின் மீது செயற்படும் முடுக்கம் ஆரத்தின் வழிச் செல்லவேண்டும் எனக் காட்டுக.

மூன்றும் பிரிவு

1. ஒரு துகள், ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கி μu^5 எனும் மைய நோக்கு முடுக்கத்துடன் இயங்குகின்றது. அது தொடக்க நிலையில் a தூரத்தில் உள்ள கவியப் புள்ளியில் இருந்து ஏவப்பட்டால்,

(i) அதன் தொடக்கத் திசைவேகம் $\left(\frac{\sqrt{\mu}}{a^2\sqrt{2}}\right)$ எனும் போதும்,

(ii) தொடக்கத் திசைவேகம் $\frac{\sqrt{\mu}}{a^2}$ எனும் போதும், துகளின் பாதைகளைக் காண்க.

[(i) $r = a\cos\theta$; (ii) $r = a$]

2. ஒரு துகளின், ஓரலகு திணிவுள்ள துகள்மீது,

$$\mu\left[2(a^2+b^2)u^5 - 3a^2b^2u^7\right]$$

எனும், மைய நோக்கு விசை செயல்படுகிறது. துகள் மையப்புள்ளியில் இருந்து a தூரத்தில், தொடக்க ஆரத்திற்கு நிலைக்குத்துத் திசையில், $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$ எனும் திசைவேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. துகள் செல்லும் பாதை

$$r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$$

எனக் காட்டுக.

3. ஒரு துகளின்மீது செயற்படும் மையநோக்கு விசை (ஓரலகு திண்மையுள்ள துகளுக்கு)

$$\frac{5\mu}{r^3} + \frac{8\mu c^2}{r^5}.$$

துகள் தொடக்கத்தில் c தொலைவில் உள்ள ஒரு கவியப் புள்ளியில் இருந்து $\frac{3\sqrt{\mu}}{c}$ திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், துகளின் மைய ஒழுக்கு

$$r = c\cos\frac{2\theta}{3}$$

எனக் காட்டுக.

4. ஒரு துகளின்மீது செயற்படும் மையநோக்கு முடுக்கம் $\mu(r^5 - a^4r)$. துகள் விசைமையத்தில் இருந்து a தூரத்தில் உள்ள கவியப் புள்ளியில் இருந்து, $\sqrt{\frac{2\mu}{3}}\cdot a^3$ திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், துகளின் பாதை $x^4+y^4 = a^4$ எனக் காட்டுக.

5. ஒரு துகள் μu^5 எனும் மைய முடுக்கத்தின் கீழ் இயங்குகின்றது. அது a தூரத்தில் உள்ள கவியத்தில் இருந்து, $n\left(\frac{\mu}{2a^4}\right)^{\frac{1}{2}}$ எனும் திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், அதன் மற்றொரு கவியத்தூரம் $\frac{a}{\sqrt{n^2-1}}$ எனக் காட்டுக.

6. ஒரு துகள், மைய எதிர்விசை $\frac{m\mu}{(\text{தூரம்})^3}$-யின் கீழ்ச் செயல்படுகிறது. அது V எனும் திசைவேகத்துடன், a தூரத்தில் உள்ள கவியப்புள்ளியில் இருந்து ஏவப்படுகிறது.

(i) அதன் மைய ஒழுக்கு $r \cos p\theta = a$ எனக் காட்டுக.

(ii) $p^2 = \frac{\mu + a^2 V^2}{a^2 V^2}$ எனில், t நேரத்தில் அது கடந்துள்ள கோணம் θ-ஐ $\frac{1}{p}\tan^{-1}\left[\frac{pV}{a}t\right]$ -இல் இருந்து பெறலாம் எனக் காட்டுக.

7. $\frac{\mu}{r^3}+f$ எனும் மைய நோக்கு முடுக்கத்துடன் இயங்கும் ஒரு துகள், a தூரத்தில் உள்ள கவியத்தில் இருந்து, $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$ எனும் திசைவேகத்துடன் ஏவப்படுகின்றது. t நேரம் சென்ற பிறகு

$$r = a - \tfrac{1}{2} f t^2$$

எனக் காட்டுக.

8. m திணிவுள்ள ஒரு துகள் ஒரு மைய ஒழுக்குப் பாதையில் வளைய வருகின்றது. மைய நோக்குவிசை,

$$km\,[\,n^2+1-(2n^2a^2/r^2)]/r^3$$

$t=0$ எனும் போது, துகள் a தூரத்தில் உள்ள ஒரு கவியத்தில் இருக்கின்றது. அந்நிலையில் அதன் திசைவேகம், கந்தழிப்புள்ளியில் இருந்து கவியப்புள்ளிக்கு விழுவதால் விளையும் திசைவேகத்தை உடையதாக இருக்கின்றது. மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு $r = a \cosh n\theta$ எனக் காட்டுக.

9. மைய நோக்கு விசை $\mu u^5\left[\frac{5}{u^2} - 8c^2\right]$ ஆக உள்ள ஒரு துகள், c தூரத்தில் உள்ள கவியப் புள்ளியில் இருந்து, கந்தழியில்

இருந்து அடையும் திசை வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. அதன் பாதை

$$r = \tfrac{1}{2}c\,[e^{2\theta} - e^{-2\theta}]$$

எனக் காட்டுக.

10. ஒரு துகள், $\frac{\mu}{(\text{தூரம்})^5}$ எனும் மைய முடுக்கத்துடன், a தூரத்தில் உள்ள கவியப்புள்ளியில் இருந்து, கந்தழிப்புள்ளியில் இருந்து விழும்போது பெறக்கூடிய திசைவேகத்தைப்போல் n மடங்கு திசை வேகத்துடன் புறப்படுகின்றது. அதன் மற்றொரு கவியத் தூரம் $\frac{a}{\sqrt{n^2-1}}$ எனக் காட்டுக.

[5-ம் கணக்கைப் பார்க்க].

11. ஒரு துகள் μr எனும் மைய எதிர்விசையின் இயக்கத்தில் உள்ளது. மைய ஒழுக்கின் எப்புள்ளியிலும் அதன் திசைவேகம், மையத்தில் இருந்து அப் புள்ளிக்கு விழுவதால் விளையும் திசை வேகத்திற்குச் சமம். பாதையின் சமன்பாடு

$$r^2 \cos 2\theta = A \qquad (A \text{ - மாறா எண்})$$

எனக் காட்டுக.

12. ஒரு மாறுத விசையின் கீழ், ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கிச் செயல்படும் ஒரு துகள், அதன் ஆரத்திற்கு நிலைக்குத்தான திசையில், மையப்புள்ளியில் ஓய்வில் இருந்து, ஏவு புள்ளியை அடையும் வரை பெறும் திசைவேகத்துடன், ஏவப்படுகிறது. அதன் பாதை

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \cos^2 \tfrac{3}{2}\theta$$

எனக் காட்டுக. இறுதியில் அதன் பாதை ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமையும் எனவும் காண்க. [அதன் இறுதிப் பாதை மையப்புள்ளி வழி செல்லும் $\theta = \frac{\pi}{3}$ எனும் நேர்க்கோடு].

13. ஒரு துகள் $\frac{\mu}{r^3}$ எனும் மைய முடுக்கத்தை உடையதாக இருக்கின்றது. அது a தூரத்தில் உள்ள கவியப்புள்ளியில் இருந்து, அதே முடுக்கத்துடன், a ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில் இயங்கும்போது பெறக்கூடிய திசைவேகத்தைப் போல $\sqrt{2}$ மடங்கு திசை வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. அதன் மைய ஒழுக்கு

$$r \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}} = c$$

எனக் காட்டுக.

14. ஒரு துகளின் மைய முடுக்கம் $\mu\left[u^4-\frac{10}{9}au^5\right]$. அது $5a$ தூரத்தில் உள்ள கவியப்புள்ளியில் இருந்து ஏவப்படுகிறது. அதன் திசை வேகம் அதே அளவு ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில் உள்ள திசை வேகத்தின், $\sqrt{\frac{5}{7}}$ மடங்கு எனில், மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு

$$r = a\,(3+2\cos\theta)$$

எனக் காட்டுக.

15. ஒரு துகளின் மைய முடுக்கம் $\mu\left[r+\frac{2a^3}{r^2}\right]$. அது a தூரத்தில் உள்ள கவியத்தில் இருந்து, அதே அளவு தூரத்தில் அமையும் வட்டப்பாதையின் திசைவேகத்தைப்போல் இருமடங்கு திசைவேகத்துடன் இயங்க ஆரம்பிக்கின்றது. அதன் மற்றொரு கவியத் தூரத்தைக் காண்க. $[r = 3a]$

16. m திணிவுள்ள ஒரு துகளின் மீது செயல்படும் மைய நோக்கு விசை $m\mu u^3\,(3+2a^2u^2)$. துகள் விசை மையத்தில் இருந்து a தூரம் உள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து, $\sqrt{\frac{5\mu}{a^2}}$ திசைவேகத்துடன், தொடக்கநிலை ஆரத்துடன் $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ எனும் கோணத்தை உண்டாக்கும் திசையில் ஏவப்படுகிறது. துகளின் பாதை $r = a\cot\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$ எனக் காட்டுக.

17. ஒரு துகள், ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கி $\frac{\mu}{r^2}$ எனும் முடுக்கவிதியின் கீழ் இயங்குகின்றது. தொடக்கநிலையில் அது விசை மையத்தில் இருந்து $3a$ தூரத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. எறிதானத்தையும், விசை மையத்தையும் சேர்க்கும் கோட்டிற்கு $\cot^{-1}\frac{3}{10}$ சாய்ந்த திசையில், $\sqrt{\frac{109}{180}\cdot\frac{\mu}{a}}$ வேகத்துடன் அது ஏவப்படுகிறது. அதன் பாதை $e=\frac{5}{6}$ உள்ள நீள் வளையப்பாதை எனக் காட்டுக. மேலும் துகள், விசைமையத்தில் இருந்து செல்லக்கூடிய மீப்பெரு தூரத்தைக் கண்டு பிடி. துகளையும், விசைமையத்தையும் சேர்க்கும் கோடு 90° சுழன்ற பிறகு, அவை யிரண்டிற்கும் இடையே உள்ள தூரத்தையும் காண்க.

$[r=30a\,;\quad r=\frac{10}{3}a]$

18. m திணிவுள்ள ஒரு துகள், $\frac{m\mu}{(\text{தூரம்})^3}$ எனும் மையநோக்கு விசையுடன், விசைமையத்திலிருந்து, a தூரத்தில் உள்ள புள்ளியில் இருந்து, ஆரத்துடன் α கோணம் உண்டாக்கும் திசையில் ஏவப்படு

கிறது. அதன் தொடக்கத் திசைவேகம் கந்தழிப் புள்ளியில் இருந்து, எறிதானத்திற்கு விழும்போது அடையக்கூடும் திசை வேகத்திற்குச் சமமெனில், மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு $r = ae^{\theta \cot(-\alpha)}$ எனக் காட்டுக.

19. ஒரு துகள், $\frac{\mu(r+2a)}{r^5}$ முடுக்கத்தை உண்டாக்கக்கூடிய விசையின் கீழ் ஒரு புள்ளியை நோக்கிச் செயல்படுகிறது. அது $(a, 0)$ எனும் புள்ளியில் இருந்து, கந்தழியில் இருந்து அடையக்கூடிய திசைவேகத்துடன், தொடக்கக் கோட்டுடன் $\cot^{-1}$ (2) கோணதிசையில் ஏவப்படுகிறது. மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு, $r = a\ (1+2\sin\theta)$ என்று நிறுவுக. அதன் கவியத் தூரங்களையும், கவியக் கோணத்தையும் காண்க. $[r = a, 3a\ ;\ \pi]$

20. ஒரு துகள், $\mu\left[u^5 - \frac{a^2}{8}u^7\right]$ மைய முடுக்கத்துடன், மைய விசையிலிருந்து a தூரத்தில் உள்ள புள்ளியில் இருந்து புறப்படுகிறது. அதன் தொடக்கத் திசைவேகம், அதே தூரத்தில் அமைந்த வட்டப் பாதையில் செல்லும்போது அடையும் திசைவேகத்தைப் போன்று $\sqrt{\frac{25}{7}}$ மடங்கு. அது ஆரத்திசையுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ கோணம் சரிந்த நிலையில் புறப்பட்டால், அதன் பாதை

$$4r^2 - a^2 = \frac{3a^2}{(1-\theta)^2}$$

எனக் காட்டுக.

21. ஒரு துகள், $\mu\,[3u^3 + a^2u^5]$ மைய முடுக்கத்துடன் இயங்குகின்றது. விசைமையத்தில் இருந்து a தூரத்தில் உள்ள புள்ளியில் இருந்து, $\frac{\pi}{4}$ சாய்ந்த திசையில், அதே தூரத்தில் உள்ள வட்டப் பாதையின் திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், அது விசை மையத்தை அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்

$$\frac{a^2}{\sqrt{2\mu}}\left[2 - \frac{\pi}{2}\right]$$

எனக் காட்டுக.

[குறிப்பு: $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{a^2+r^2}{2a}\right)^2$

$$\frac{dr}{dt} = -\left(\frac{a^2+r^2}{2a}\right)\frac{dt}{d\theta}$$
$$= -\left(\frac{a^2+r^2}{2a}\right)\frac{\sqrt{2\mu}}{r^2}\Big]$$

22. m திணிவுடைய ஒரு துகள், மீள்சக்தி உடைய (நீட்டப்படக் கூடிய) a நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் முனையில் கட்டப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் மீட்சிக் குணகம் nmg. கயிற்றின் மறுமுனை ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் கட்டப்பட்டுள்ளது. துகள் a தூரத்தில் உள்ள கவியப் புள்ளியில் இருந்து $\sqrt{2pgh}$ திசை வேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், அதன் மற்றொரு கவியத் தூரத்தை

$$nr^2(r-a)-2pha(r+a)=0$$

எனும் சமன்பாட்டில் இருந்து பெறலாம் எனக் காட்டுக.

23. கிடைத்தள மட்டத்தில் உள்ள, ஒரு வழவழப்பான வளையத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு நூலின் இரு முனைகளிலும் முறையே M, m திணிவுகள் உள்ள துகள்கள் ஒரு முனைக்கு ஒன்றாகக் கட்டப் பட்டுள்ளன. m திணிவுடைய துகள் நூலிற்குக் கிடைக்குத்துத் திசையில், வளையத்தில் இருந்து a தூரத்தில் ஏவப்படுகின்றது. அதன் பாதையின் சமன்பாடு

$$a = r\cos\sqrt{\frac{m}{M+m}}\,\theta$$

எனக் காட்டுக.

24. ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மீது A எனும் துகள் நகருகின்றது. A-உடன் AOB எனும் நூல் கட்டப்பட்டு, B-ன் முனையில் A-ன் திணிவுள்ள மற்றொரு துகள் கட்டப்பட்டு, மேசையில் உள்ள O எனும் துவாரத்தின் வழியே சென்று, OB செங்குத்தாகத் தொங்குகின்றது. தொடக்கத்தில் A, மேசையின் மீது, $OA=a$ இருக்குமாறு, OA-க்குச் செங்குத்தாக $\sqrt{\frac{9}{2}ag}$ திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், O-இல் இருந்து அதன் தூரம் a, $3a$ இவற்றிற்கிடையே உள்ள நீளத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

25. மைய ஒழுக்கில் நகரும் ஒரு துகளுக்கு, ஏதோவொரு வட்டப்பாதையில் நகரும்போதுள்ள திசைவேகமும், கந்தழிப்புள்ளியில் இருந்து அத் தூரத்தைத் துகள் அடையும்போதுள்ள திசைவேகமும் ஒன்ருக இருக்க வேண்டுமாளுல், மைய நோக்குவிசை $\frac{1}{r^3}$-ன் விகிதத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

[குறிப்பு : $P = \phi'(r)$ என்க

V = வட்டப்பாதையில் திசைவேகம்

V' = கந்தழிப்புள்ளியில் இருந்து விழும்போதுள்ள திசைவேகம்.

$$\frac{V^2}{r} = \phi'(r)$$

$$\frac{(V')^2}{2} = -\phi(r) + A$$

$$\therefore \quad 2r\,\phi(r) + r^2\,\phi'(r) = 2rA$$

$$r^2\,\phi = Ar^2 + B$$

$$\therefore \quad \phi' \propto -\frac{1}{r^3}$$]

நான்காம் பிரிவு

1. $\frac{\mu}{r^2}$ எனும் மைய முடுக்கத்தோடு நகரும் துகளின், ஏதாவது ஒரு புள்ளியிலான திசைவேகம், கந்தழிப்புள்ளியில் இருந்து வந்தடையும் திசைவேகத்தைவிடக்,

குறைந்ததென்றால் மைய ஒழுக்கு நீள்வளையம் என்றும்
சமமென்றால் மைய ஒழுக்குப் பரவளைவு என்றும்
அதிகமென்றால் மைய ஒழுக்கு அதிபரவளைவு என்றும்

காட்டுக.

2. தலைகீழ் வர்க்க விதியைக் கொண்ட மையமுடுக்கத்தோடு நகரும் துகள்,

துகளின் ஏதாவது ஒரு புள்ளியிலான திசைவேகம் $\lesseqgtr \sqrt{2}$ [அதே தூரத்தில் அமைந்தவட்டப் பாதையில் ஆன திசைவேகம்]

என்பதைப் பொறுத்து முறையே நீள்வளைய, பரவளைவு, அதிபரவளைவுப் பாதைகளில் அமையும் எனக் காட்டுக.

3. சூரியனில் இருந்து பெரும தூரத்தில் இருக்கும்போது v_1, சிறும தூரத்தில் இருக்கும்போது v_2 எனும் திசைவேகங்களையுடைய ஒரு கோளுக்கு (Planet)

$$(1-e)\,v_1 = (1+e)\,v_2$$

எனக் காட்டுக.

[கோள், சூரியனைச் சுற்றி ஒரு நீள்வளையப் பாதையில் வருகிறது என அறிவோம்].

4. ஒரு கோளின், சூரியனைச் சுற்றிய பாதையில் பெரும, சிறும திசைவேகங்கள் முறையே 30 கி. மீ./வி., 29·2 கி. மீ./வி. எனில், பாதையின் மையத் தொலைத் தகவு (e) என்ன? $\left[\frac{1}{74}\right]$

5. ஒரு துகள் μ/r^2 மைய முடுக்கத்தோடு, நீள்வளையப் பாதையில் செல்கின்றது. சிற்றச்சின் முனையில் அதன் வேகம், துகளின் பெரும, சிறும வேகங்களின் பெருக்குச் சராசரி எனக் காட்டுக.

6. ஒரு துகள், விசைமையத்தைக் குவியமாகக் கொண்டு ஒரு நீள்வளையப் (அதிபரவளைவுப்) பாதையில் செல்கின்றது. ஒரு குவிய நாணின் முனைகளில் ஆன திசை முடுக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல், [குவியத்தின் வழிச் செல்லும்] செவ்வகலத்தின் முனையில் ஆன திசைவேகத்தின் வர்க்கத்தின் இரு மடங்காகும் எனக் காட்டுக.

7. ஒரு கோளின் பெரும, சிறும கோணவேகங்கள் $n:1$ என்ற விகிதத்தில் இருந்தால், கோளின் பாதையின் $e = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ எனக் காட்டுக.

8. ஒரு துகள், குவியத்தை விசைமையமாகக் கொண்ட, நீள்வளையப் பாதையில் செல்கின்றது. கோண வேகங்களின் பெரும, சிறும மதிப்புகள் நீட்டச்சின் முனைகளில் அமைகின்றன எனக் காட்டு. இவை முறையே α, β எனில், சராசரிக் கோணவேகம் $\frac{(2\alpha\beta)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ எனக் காட்டுக.

$$\left[\text{சராசரிக் கோணவேகம்} = 2\pi \div \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\right]$$

9. குவியத்தை விசைமையமாகக் கொண்ட ஒரு நீள்வளையப் பாதையில், $\frac{\mu}{r^2}$ எனும் விதிப்படி நகரும் துகளின் பாதை அமைகின்றது. விசைமையத்தில் இருந்து r தூரத்தில் V எனும் வேகத்தோடு துகள் ஏவப்படுகிறது. துகளின் காலவட்ட நேரம் (Periodic Time)

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left[\frac{2}{r}-\frac{V^2}{\mu}\right]^{-3/2}$$

எனக் காட்டுக.

10. ஒரு கோள், சூரியனைக் குவியமாகக் கொண்ட நீள்வட்டப் பாதையில் இருக்கின்றது. அதன் நீட்டச்சு $2a$, மையத் தொலைத்தகவு

(eccentricity) e, காலவட்டநேரம் T எனில், சூரியனுக்கு எதிர்த் திசையில் கோளின் வேகம் உச்சமதிப்பை அடைய, பாதையின் நீட்டச் சுக்கு, கோளின் ஆரம் குத்தாக இருக்கவேண்டும் எனக் காட்டுக. அவ்வேகம் $\frac{2\pi a e}{T\sqrt{1-e^2}}$ எனவும் காட்டுக.

11. தலைகீழ் வர்க்க விதியின்படி நீள்வட்டத்தில் அமையும் ஒரு துகளுக்கு, சிற்றச்சின் முனையில் வேகம் V. இப்புள்ளியில் வேகம் V_1 என்று அதிகரிக்கப்பட்டால் பாதை பரவளைவாக மாறுகின்றது. $V_1^2 = 2V^2$ எனக் காட்டுக.

12. குவியத்தை விசைமையமாகக் கொண்டு ஒரு துகள் மையத் தொலைத் தகவு e உள்ள நீள்வட்டப் பாதையில் இயங்குகின்றது. துகள் சிற்றச்சின் ஒரு முனையில் இருக்கும்போது, திசைவேகம் இரு மடங்காகின்றது. துகளின் புதுப்பாதை $\sqrt{9-8e^2}$-ஐ மையத் தொலைத் தகவாகக் கொண்ட ஓர் அதிபர வளைவு எனக் காட்டுக.

ஐந்தாம் பிரிவு

1. μr என்ற மையவிசையின் கீழமைந்த நீள்வளையப் பாதையில், P எனும் ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் துகளின் வேகம், OP-ன் துணை விட்டத்தின் நீளத்தின் விகிதத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

2. ஒரு துகள் மையப்புள்ளியை நோக்கிய, மைய விசையின்கீழ், ஒரு நீள்வளையத்தை அமைக்கின்றது. v, v_1, v_2 முறையே செவ்வகலம், நெட்டச்சு, சிற்றச்சு இவற்றின் முனைகளில் ஆன திசைவேகம் எனில்

$$v^2v_2^2 = v_1^2\,(2v_2^2 - v_1^2)$$

எனக் காட்டுக.

3. ஒரு துகள், மையப்புள்ளியை நோக்கிய மையவிசையின்கீழ், ஒரு நீள்வளையத்தை அமைக்கின்றது. சிற்றச்சின் முனையில் திசைவேகம் V என்றும், ஒரு ஜோடி இணைவிட்டங்களின் முனைகளில் வேகம் v_1, v_2 என்றும் கொண்டால்,

$$v_1^2 + v_2^2 = V^2 + \mu b^2$$

எனக் காட்டுக. (சிற்றச்சின் நீளம் $= 2b$)

4. ஒரு துகள், மையப் புள்ளியை நோக்கிய மைய விசையின் கீழ், ஒரு நீள் வளையத்தில் இயங்குகின்றது. ஒரு குவியத்தைப் பற்றிய துகளின் கோணவேகம், அக் குவியத்தில் இருந்து உள்ள தூரத்திற்கு எதிர் விகிதத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

5. சமதளத்தில் இயங்கும் ஒரு துகளின் முடுக்கம், ஒரு நிலையான புள்ளிக்கு நேர் எதிர்த்திசையில், அப் புள்ளியில் இருந்து உள்ள தூரத்தின் விகிதத்தில் அமைகின்றது. துகளின் பாதை ஓர் அதிபர வளைவு எனக் காட்டுக.

6. ஒரு துகளின் முடுக்கக் கூறுகள் $-4\mu x$, $-\mu y$. இவை முறையே Ox, Oy திசைகளில் இருக்கின்றன. துகள் தொடக்கத்தில் (a, b) என்ற புள்ளியில் ஓய்வில் இருக்கின்றது. அது $2ay^2 = b^2(x+a)$ என்ற பரவளைவின் மேல் அலைவியக்கம் பெறும் எனக் காட்டுக. முதன் முதலில் பாதை y அச்சைக் கடக்கும் இடத்தில் அதன் திசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

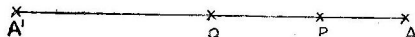
$$\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}\mu\,(8a^2+b^2)}\,;\ OX\text{-க்கு } \pi + \tan^{-1}\frac{b}{2\sqrt{2}a} \text{ சாய்ந்த திசையில்} \right].$$

10. தனியிசை யியக்கம்

(Simple Harmonic Motion)

10.1. தனியிசை யியக்கம்

1. **விளக்கம் :** நேர்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு துகளின் **முடுக்கத்தின் அளவு, அக் கோட்டிலிருக்கும் ஒரு புள்ளியிலிருந்துள்ள அதன் தூரத்துடன் நேர் விகிதத்திலும், முடுக்கத்தின் திசை எப்போதும் புள்ளியையே நோக்கியும் அமைந்தால்** அத்தகைய இயக்கம் (நேர்க் கோட்டில்) தனியிசை யியக்கம் எனப்படும். இதை **S. H. M.** (Simple Harmonic Motion) எனக் குறிப்போம்.



படம் 104.

2. **இயக்கத்தின் பண்பை ஆராய்தல் :** துகள் இயங்கும் நேர்க்கோடு $A'A$ ஆகுக. O என்பது கோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளி. P என்பது 't' நேரத்தில் துகளின் நிலை. OA திசையை நேர்த்திசையாகக் (Positive direction) கொள்வோம்.

$OP = x$ என்க.

அப்போது அதன் முடுக்கம் $\frac{d^2x}{dt^2}$

தனியிசையியக்க விளக்கப்படி

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \mu x = 0 \qquad D \equiv \frac{d}{dt} \text{ எனின்}$$

$$(D^2 + \mu)\, x = 0$$

இந்த வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$x = A\cos(\sqrt{\mu}\,t + B) \qquad \text{......(1)}$$

A, B என்ற பொதுநிலை எண்களின் மதிப்பு, புறப்படு நியதிகளுக்கு (Initial condition) ஏற்ப மாறும். 't' நேரத்தில் துகளின் வேகம்

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}\,t + B) \qquad \text{......(2)}$$

3. புறப்படு நியதிகள் : $t=0$ எனும் போது x-ன் மதிப்பு a, $u = 0$ ஆகுக.

$\therefore\ a = A\cos B \qquad 0 = -A\sqrt{\mu}\sin B$

$\therefore\ B = 0 \qquad \therefore\ A = a$

$\therefore$ சமன்பாடுகள் (1), (2)

$$x = a\cos\sqrt{\mu}\,t \qquad \text{......(3}$$

$$v = -a\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\,t \text{ என வருகிறது} \qquad \text{......(4)}$$

$\therefore\ v^2 + \mu x^2 = a^2\mu$

$$\therefore\ v^2 = \mu(a^2 - x^2) \qquad \text{......(5)}$$

என இயக்கத்தின் பண்பை விவரிக்கும் மூன்று சமன்பாடுகள் வருகின்றன.

(i) இன்ன நேரத்தில், துகளின் நிலை என்ன

(ii) அந்த நேரத்தில் துகளின் வேகம் என்ன

(iii) ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில் அதன் வேகம் என்ன

எனும் இயக்கத்தைப் பற்றிய செய்திகளை இந்த மூன்று சமன்பாடுகள் தருகின்றன.

4. தனியிசை யியக்கத்தின் காலம் (Period of S. H. M.)

't_1' நேரத்தில் துகளின் நிலை x_1 ஆகுக.

அதன் வேகம் v_1 ஆகுக.

$\therefore\ x_1 = a\cos\sqrt{\mu}\ t \qquad v_1 = -a\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\ t_1$

இன்னும் $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ காலம் சென்றால் $t = t_1 + \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$

அப்போது

$$x = a \cos \sqrt{\mu}\left(t_1+\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\right)$$
$$= a \cos \sqrt{\mu}\, t_1 + 2\pi$$
$$= a \cos \sqrt{\mu}\, t_1$$
$$\therefore \quad x = x_1 \quad \text{இதேபோல}$$
$$v = v_1$$

ஆகவே ஒவ்வொரு $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ கால அளவிற்குப் பிறகு துகள் திரும்பத் திரும்ப ஒரே நிலைக்கு ஒரே வேகத்துடன் வரும். இந்தக் கால அளவை T எனக் குறித்தால் $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$

T எனும் கால அளவு தனியிசை யியக்கத்தின் அலைவு காலம் (Period of S. H. M.) எனப்படும்.

[குறிப்பு: $x = A \cos(\sqrt{\mu}\, t + B)$ எனும் சமன்பாட்டைக் கொண்டால் இதே முடிவு வரும். ஆகையால் அலைவு காலம், புறப்படு நியதிகளைப் பொறுத்ததன்று என வருகிறது.]

5. வீச்சம் (Amplitude): $x = a \cos \sqrt{\mu}\, t$ என்றதால் இயக்கம் $x=a$, $x=-a$ என்ற நிலைகளுக்கிடையே நிகழ்கிறது என அறிகிறோம். O என்ற புள்ளிக்கு இருபுறமும் 'a' தூரத்திற்குமேல் துகள் போகாது. இந்தத் தூரம் 'a', தன்னிசை யியக்கத்தின் வீச்சம் எனப்படும். 'வீச்சம்' அலைவு காலத்தைச் சார்ந்ததன்று எனவும் தெளிவாகிறது.

6. முழு அலைவு (Complete Oscillation): துகள் ஒரு நிலையிலிருந்து புறப்பட்டு அதே நிலைக்கு அதே திசையில் உள்ள வேகத்தில் அடுத்தாற்போல் வருவது ஒரு முழு அலைவு எனப்படும். A-லிருந்து புறப்பட்டு A-க்கு மீண்டுவருவது முழு அலைவு எனவாகும். இதற்காகும் காலம் அலைவு காலம் $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ எனவும் அறிகிறோம். தனியிசை யியக்கத்தைக் கூறும்போது முழு அலைவை, 'அலைவு' (Oscillation) எனவும் கூறுவது வழக்கம்.

குறிப்பு: ஒரு வினாடியில் n அலைவுகள் என்றால், ஓர் அலைவுக்குள்ள காலம் $\frac{1}{n}$

$$\therefore \quad \text{அலைவு காலம்} \quad T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$$

(முடுக்கம் $= -\mu x$ எனின்).

கணக்கு 1: தனி யிசையியக்கத்தில் ஒரு துகளின் அலைவுகள் ஒரு நிமிடத்தில் 100 ஆகிறது. அதன் மிகுந்த வேகம் விநாடிக்கு 20 அடி என்றால் அதன் வீச்சத்தையும், மிகுந்த முடுக்கத்தையும் கணக்கிடுக. தனியிசையியக்க மையத்திற்கும், அதன் அலைவு முடிவுக்கும் நடு மையத்தில் அதன் வேகம் என்ன? (M. U. Sep. 66).

தனியிசை யியக்கச் சூத்திரங்கள் :

$$x = a \cos \sqrt{\mu}\, t$$

$$v = -a\sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu}\, t$$

$$v^2 = \mu (a^2 - x^2)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \qquad \text{முடுக்கம்} = -\mu x$$

இங்கு $T = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \quad \therefore \quad \sqrt{\mu} = \frac{10\pi}{3}$

மிகுந்த வேகத்தின் அளவு $= a\sqrt{\mu} = 20$

$$\therefore \quad a = \frac{20}{\sqrt{\mu}} = \frac{60}{10\pi} = \frac{6}{\pi}$$

(i) $\therefore$ வீச்சம் $= \frac{6}{\pi}$ அடி.

(ii) மிகுந்த முடுக்கத்தின் அளவு $= \mu a = \frac{100\pi^2}{g} \times \frac{6}{\pi}$

$$= \frac{200\pi}{3}\ ft/\text{sec}^2$$

(iii) $x = \frac{3}{\pi}$ என்றால் $v = \sqrt{\mu}\,\sqrt{a^2 - x^2}$

$$= \frac{10\pi}{3}\sqrt{\frac{36}{\pi^2} - \frac{9}{\pi^2}}$$

$\therefore$ கேட்கப்பட்டுள்ள வேகம் $= 10\sqrt{3}\ ft/\text{sec}$.

கணக்கு 2: மீள் இயல்புடைய, எடையில்லாத இழுபடக் கூடிய நூலின் இயற்கை நீளம் a. மீள் இயல்பு குணகம் λ. அந்த நூல் ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொங்குகிறது. மற்றொரு நுனியில் m திணிவுள்ள ஒரு துகளைக் கட்ட நூல் b தூரம் நீண்டு துகள் சமநிலையில் உள்ளது. துகளை இன்னும் c தூரம் கீழே $(c < b)$ இழுத்துவிட்டால் ஏற்படும் இயக்கத்தை ஆராய்க.

படத்தில் $OA = a$

$OB = a+b$

$OC = a+b+c$

't' நேரத்தில் துகள் P என்ற நிலையில் $BP=x$ எனும்படி இருக்கட்டும்.

படம் 105.

(i) B என்ற நிலையில் துகள் சமநிலையில் உள்ளது ; T_B இழுவிசை

$$\therefore \quad T_B = mg$$

ஆனால் Hooke's விதிப்படி $T = \frac{\lambda b}{a}$

$$\therefore \quad \frac{\lambda b}{a} = mg$$

(ii) P என்ற நிலையில் துகளின் முடுக்கம் $\frac{d^2x}{dt^2}$ கீழ்நோக்கி P-ல் செயல்படும் விசைகள் mg கீழ்நோக்கி, இழுவிசை T_P மேல்நோக்கி. ஆதலால் நியூட்டன் விதிப்படி

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - T_P \quad \text{ஆனால்} \quad T_P = \frac{\lambda(b+x)}{a}$$

$$\therefore \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \frac{\lambda b}{a} - \frac{\lambda x}{a}$$

$$= -\frac{\lambda x}{a} \quad \left(mg = \frac{\lambda b}{a} \text{ ஆனதால்}\right)$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda x}{am}$$

இந்த வகைக்கெழுச் சமன்பாடு தனியிசையியக்கச் சமன்பாடாகும். ஆகவே துகள்

(i) B-ஐ மையமாகக்கொண்டுள்ள தனியிசையியக்கத்தில் இயங்குகிறது.

(ii) அதன் வீச்சம் $= c$; $c < b$ என்றதால் இயக்க முழுவதும் நூலின் நீளம் $> a$; ஆகவே இழுவிசை மறைவதில்லை.

(iii) இயக்க காலம் $T = 2\pi\sqrt{\frac{am}{\lambda}}$; $\lambda = \frac{mag}{b}$

ஆனதால் $T = 2\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$

கணக்கு 3 : மேற்கூறிய கணக்கில் $c > b$ என்றால் இயக்கம் எவ்வாறு நிகழ்கிறது என விவரி. நூலுக்குப் பிரதியாக அதே நீளமும் அதே மீள்இயல்பு குணகமுடைய சுருள் கம்பியானால் (Spring) இயக்கம் எவ்வாறு மாறுகிறது?

இயக்கச் சமன்பாடு $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda x}{am} = -\frac{gx}{b}$

துகள் B-யிலிருந்து AB அடையும்போது $x = -b$

(B-க்கு மேல் c ($> b$) தூரம் போகலாமாதலால் துகள் A எனும் நிலையை வேகம் பூச்சியமாகாமல் அடையும்]

" $v^2 = \mu(a^2 - x^2)$ " என்பது சூத்திரம். இங்கு

$$\therefore v^2 = \frac{g}{b}(a^2 - b^2).$$

துகளின் வேகம் மேல் நோக்கியுள்ளது. இழுவிசை மறைந்துவிடுகிறது. (நூல் இயற்கை நீளத்தை அடைவதால்) துகளின்மேல் புவியீர்ப்பு விசை மட்டும் செயல்படுகிறது.

$\therefore$ துகள் $\frac{v^2}{2g}$ தூரம் மேலே செல்லும்.

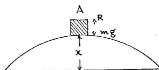
அதாவது $\frac{g(a^2-b^2)}{b \cdot 2g} = \frac{(a^2-b^2)}{b}$ தூரம் மேலே சென்று கீழே அதே வேகத்துடன் கீழ்நோக்கி விழும். இதற்கு ஆகும் காலம் $\frac{2v}{g}$;

பிறகு மீண்டும் தனியிசை யியக்கம் துவங்கும்.

[C-யிலிருந்து புறப்பட்டு மீண்டும் C-க்கு வர ஆகும் காலத்தைக் கணக்கிடுக].

(ii) நூலில்லாமல் சுருள்கம்பியானல், இழுவிசைக் கம்பி இயற்கை நீளத்தைவிடக் குறைவாகும் போது தள்ளுவிசை (Thrust) யாகும். ஆகவே முழு இயக்கமும் தனியிசை யியக்கமாகும்.

கணக்கு 4: மேல் கீழாகத் தனியிசை யியக்கத்தில் இயங்கும் தட்டு ஒன்றின் m திணிவுள்ள ஒரு துகள் உள்ளது. தனியிசை யியக்கத்தின் வீச்சம் 1 அடி, காலம் 1 செகண்டு கிடைநிலையிலிருந்து $\frac{8}{\pi^2}$ அடி உயரத்தில் தட்டு வரும்போது துகள் தட்டை விட்டு மேலெழும்பிக் கிடைதளத்திற்கு $\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{4}{\pi^2}\right)$ அடி உயரத்திற்குப் போகும் என நிறுவுக.



படம் 106.

துகளின் உயரம் கிடைதளத்திற்கு மேல் x ஆகுக. அதன் முடுக்கம் $\frac{d^2x}{dt^2}$; அதன்மேல் செயல்படும் விசைகள் mg கீழ்நோக்கி. தட்டின் தாங்குவிசை R மேல்நோக்கி.

∴ நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = R - mg$$

ஆனல் தட்டு தனியிசை யியக்கத்தில் உள்ளதால்

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x \qquad \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 1 \text{ (தரப்பட்டுள்ளது)}$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 x$$

$$\therefore\ -4m\pi^2 x = R - mg$$

$$R = m(g - 4\pi^2 x)$$

துகள் தட்டிலிருந்து விடுபடும் நேரம் $R=0$

$$\therefore\ 4\pi^2 x = g = 32$$

$$\therefore\ x = \frac{g}{4\pi^2} = \frac{8}{\pi^2} \text{ அடி.}$$

(ii) வேகம் v என்றால், மேலே போகும் தூரம் $= \dfrac{v^2}{2g}$

$$v^2 = \mu\,(a^2 - x^2)$$

$$= 4\pi^2\left(1 - \frac{g^2}{16\pi^4}\right) \quad [a=1 \text{ எனக் கொள்க}].$$

$$= 4\pi^2 - \frac{g^2}{4\pi^2}$$

$\therefore$ மேலே போகும் தூரம் $= \dfrac{4\pi^2}{2g} - \dfrac{g}{8\pi^2}$

$\therefore$ கிடைதளத்திற்கு மேல் உள்ள தூரம்

$$= \frac{4\pi^2}{2g} - \frac{g}{8\pi^2} + \frac{2g}{8\pi^2}$$

$$= \left(\frac{4\pi^2}{2g} + \frac{g}{8\pi^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{4}{\pi^2}\right) \text{ அடி.}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு துகளின் வேகம் $v = R\sqrt{a^2 - x^2}$ எனத் தரப்படுகிறது. இங்கு R, a என்பவை நிலை எண்கள்; x என்பது கோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து துகளின் தூரம். துகளின் இயக்கம் தனியிசை யியக்கம் என நிறுவுக. அதன் வீச்சம், காலம் இவற்றைக் காணவும்.

2. தனியிசை யியக்கத்தில் உள்ள துகளின் அலைவுகள் நிமிடத்திற்கு 150 ஆகும். இதன் மிகுந்த முடுக்கம் 10 அடி/விநாடி^{2}. அதன் வீச்சத்தைக் காண்க.

3. OAB என்ற கோட்டில் தனியிசை இயக்கத்தில் உள்ள துகளின் வேகம் A, B என்ற நிலைகளில் O ஆகும். $OA = a$, $OB = b$;

AB-யின் மையத்தில் வேகம் v என்றால் அலைவு காலம் $\frac{\pi(b-a)}{v}$ எனக் காண்க.

4. தனியிசை யியக்கத்தில் உள்ள துகளின் வேகம் O என்ற புள்ளியிலிருந்து x_1 தூரத்தில் v_1, x_2 தூரத்தில் v_2 என்றால் அலைவு காலம் $2\pi\sqrt{\frac{x_1^2-x_2^2}{v_2^2-v_1^2}}$ என நிறுவுக.

5. தனியிசை யியக்கத்தின் வீச்சம் a, காலம் $\frac{1}{n}$. துகளின் வேகம் மிகுந்த நேரத்திற்கும், அதில் பாதியாக இருக்கும் நேரத்திற்கும் உள்ள காலம் $\frac{1}{6n}$ எனக் காண்க.

6. தொங்கவிடப்பட்டுள்ள சுருள்கம்பியின் மற்ற நுனியில் 1 பவு. கல்லைக் கட்டினால் $\frac{1}{2}$ அங்குலம் நீளுகிறது. அதில் 4 பவு. கல்லைக் கட்டி இழுத்துவிட்டால் ஏற்படும் தனியிசை யியக்கத்தின் அலைவு காலம் $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ எனக் காண்க.

7. ஒரு சுருள்கம்பியின் நுனியில் ஒரு துகளை மாட்ட அது a தூரம் நீள்கிறது. அதைக் கீழே இழுத்துவிட்டால் அலைவு காலம் $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ எனக் காண்க.

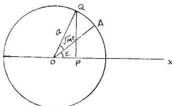
8. ஒரு துகள் ஒரு வழுவழுப்பான மேசைமீதுள்ளது. அது இரு புறமும் ஒன்று போன்றுள்ள சம நீளமான சுருள்கம்பியால் இழுத்துக் கட்டப்படுகிறது. துகளைச் சம நிலையிலிருந்து கட்டப்பட்ட பக்கம் நகர்த்திவிட்டால் ஏற்படும் இயக்கம் தனியிசை யியக்கம் எனக் காட்டுக. அதன் காலம் $2\pi\sqrt{\frac{ml}{2\lambda}}$ என நிறுவுக. [m துகளின் திணிவு, l கம்பியின் நீளம், λ அதன் மீள் இயல்பு குணகம்.]

9. மீள்யியல்புடைய ஒரு நூலின் இயற்கை நீளம் l. அதன் ஒரு நுனி A என்ற புள்ளியில் கட்டப்பட்டுத் தொங்கவிடப்படுகிறது. மற்ற நுனியில் ஒரு துகளை மாட்ட, நீளம் l_1 ஆகிறது. துகளை A என்ற இடத்திலிருந்து கீழேவிட அது $l_1+\sqrt{l_1^2-l^2}$ தூரம் விழுகிறது எனக் காண்க.

10. m_1, m_2 என்ற திணிவுகள் உள்ள இரு துகள்கள் ஒரு நிறை யில்லாத சுருள்கம்பியால் இணைக்கப்பட்டு வழுவழுப்பான கிடை

தளத்தில் உள்ளன. m_1ஐ நிலையிருத்தி, கம்பியைச் சற்றே நீட்டி m_2-வை இயங்கவைத்தால் அதன் காலம் $\frac{1}{n}$. m_2ஐ நிலையிருத்தி, அதே போல m_1ஐ இயங்க வைத்தால் காலம் $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$ எனவும், இரண்டும் இயங்கினுல் காலம் $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}$ எனவும் காண்க.

10·2. தனியிசை யியக்கமும் வட்ட இயக்கமும்



படம் 107.

Q எனும் துகள் O-வை மையமாகவும் 'a' நீளம் ஆரமும் உள்ள வட்டத்தில் $\sqrt{\mu}$ எனும் சீரான கோணவேகத்துடன் இயங்கட்டும். அப் போது அது ஒருமுறை சுற்றிவர ஆகும் காலம் $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$.

வட்டத்தின் விட்டம் OX-ன் மேல் Q-ன் வீழல் P ஆகுக.

't' நேரத்தில் $OP=x$ ஆகுக. $XOQ=\theta$ ஆகுக.

$\therefore \quad x = a\cos\theta$

$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = -a\sin\theta; \qquad \frac{d\theta}{dt} = -a\sqrt{\mu}\sin\theta$

$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\sqrt{\mu}\cos\theta; \qquad \frac{d\theta}{dt} = -a\mu\cos\theta$

$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x \qquad [x = a\cos\theta$ ஆனதால்$]$

$\therefore$ Q, வட்டப் பரிதியில் $\sqrt{\mu}$ எனும் சீரான கோணவேகத் துடன் இயங்கும்போது, விட்டத்தின்மேல் அதன் வீழல் O-வை மையமாகக் கொண்டு தனியிசை யியக்கத்தில் இயங்குகிறது.

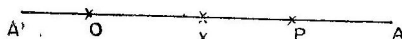
P-யின் தனியிசை யியக்கத்தை Q-வின் வட்ட இயக்கத்தால் ஆராயலாம்.

Q-வின் புறப்படும் இடம் A ஆகுக. $\angle XOA = t$ ஆகுக. அப்போது $t=0$; 't' நேரம் சென்றதும் $\angle AOQ = \sqrt{\mu}\, t$

$\therefore\ \theta = \sqrt{\mu}\, t + \epsilon \qquad \therefore$ P-யின் நிலை $x = a\cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon)$

$\sqrt{\mu}\, t + \epsilon$ எனும் கோணம் நிலைதரு கோணம் (Phase) எனப்படும். ϵ எனும் கோணம் தொடக்கநிலைக் கோணம் (Epoch) எனப்படும்.

ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும் இரண்டு தனியிசை யியக்கத்தின் கூடுதல் காணல்.



படம் 108.

X-ஐ மையமாகக் கொண்ட தனியிசை யியக்கத்தில் P, $A'XA$ எனும் கோட்டில் இயங்கட்டும். அதே கோட்டில் O எனும் புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு X, தனியிசை யியக்கத்தில் இயங்கட்டும். அப்போது O-வைச் சார்ந்த P-யின் இயக்கம் இவ்விரண்டின் கூடுதலாகும்.

தனியிசை யியக்கச் சூத்திரங்களினால்

$$XP = a\cos(nt+\epsilon)$$

$$OX = a'\cos(n't+\epsilon')$$

$[\sqrt{\mu} = n,\ \sqrt{\mu'} = n'$ எனப் பிரதியிட$]$

$\therefore$ O-வைச் சார்ந்த P-யின் இடப்பெயர்ச்சி

$$OP = a\cos(nt+\epsilon) + a'\cos(n't+\epsilon)$$

ஒரே அலைவு காலமுள்ள இரு தனியிசை யியக்கக் கூடுதல்

அலைவு காலம் சமமானால் $n = n'$

$$\therefore\ OP = a(\cos nt+\epsilon) + a'\cos(nt+\epsilon')$$
$$= A\cos(nt+E)$$

இங்கு $A\cos E = a\cos\epsilon + a'\cos\epsilon'$

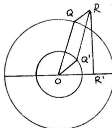
$A\sin E = a\sin\epsilon + a'\sin\epsilon'$

ஆகவே கூடுதலும் அதே காலமுள்ள தனியிசை இயக்கம் எனக் காண்கிறோம். இதன் வீச்சம் A; தொடக்கநிலைக் கோணம் E.

$$\therefore\ A^2 = a^2+a'^2+2aa' \cos (\epsilon-\epsilon')$$

$$\tan E = \frac{a \sin \epsilon + a' \sin \epsilon'}{a \cos \epsilon + a' \cos \epsilon'}$$

வட்ட இயக்கத்தால் காட்டல்



படம் 109.

Q, Q' என்பவை 'n' எனும் சீரான கோணவேகத்துடன் a, a' எனும் ஆரங்களுடைய பொதுமைய வட்டங்களில் இயங்கட்டும். 't' நேரத்தில் அவற்றின் நிலைகள் Q, Q' ஆகுக. OQ, OQ' எனும் அடுத்த பக்கங்களையுடைய இணைகரம் $OQ'RQ$ ஆகுக. அப்போது Q, Q' வட்டங்களில் இயங்க, R-ம் வட்டத்தில் இயங்கும். அதன் வீழல் R', இரு தனியிசை யியக்கங்களின் கூடுதலான தனியிசை யியக்கத்தில் இயங்கும்.

$R'OQ = \epsilon$, $R'OQ' = \epsilon'$ என்றால்

$OR^2 = A^2$ எனவும் $R'OR = E$ எனவும்

காணல் எளிது.

அலைவு காலம் சமமாக இல்லாவிடில்

தனியிசை யியக்கங்களின் கூடுதல் தனியிசை யியக்கமாகாது. $n' = n+\lambda$ ஆகுக. λ மிகச் சிறியதாக இருக்கட்டும்.

$$x = a \cos (nt+\epsilon) + a'(\cos nt+\lambda t+\epsilon')$$

$\lambda t+\epsilon' = \epsilon_1$ என இடுக.

$$\therefore\ x = A \cos (nt+E)$$

$$A^2 = a^2+a'^2+2aa' \cos(e_1-e)$$
$$= a^2+a'^2+2aa' \cos(\lambda t+e'-e)$$

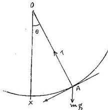
ஆகவே அலைவு ஏறி இறங்கும் எனக் காண்கிறோம். இயக்கமும் ஏறக்குறைய தனியிசை யியக்கத்தைப் போன்று இருக்கிறது.

தனியூசலி

(Simple Pendulum)

10·3. தனியூசலி

இழுபடாத நிறையற்ற முறுக்கற்ற ஒரு நூலின் ஒரு நுனி O என்ற இடத்தில் கட்டப்படட்டும். மற்ற நுனி A-யில் m திணிவுள்ள ஒரு பொருள் இணைக்கப்படட்டும். இவ்வாறு தொங்கும் நூலை நிலைக் கோட்டிலிருந்து சற்றே அகற்றி விடுவோமாக. இவ்வாறு உள்ள நூலும் நூல் நுனியில் இயங்கும் பொருளும் சேர்ந்து தனியூசலி (Simple Pendulum) எனப்படும்.



படம் 110.

[குறிப்பு: நூலுக்குப் பதிலாக, நிறையற்ற குச்சியும் (light rod) இருக்கலாம்].

தனியூசலியின் இயக்கம்

OA-யின் நீளம் l ஆகுக.

OX என்பது கீழ்நோக்கியுள்ள கிடைகோடு

't' நேரத்தில் $\angle XOA = \theta$ ஆகுக.

A-யில் செயல்படும் விசைகள், mg எனும் ஈர்ப்பு விசையும் T எனும் AO திசையில் உள்ள இழுவிசையுமாகும். O-வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் A இயங்குவதால், கோணமதிகமாகும் திசையில் A-யின் முடுக்கத்தின் தொடுகோட்டுப் பிரிவு $= l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

∴ அதே திசைக்கு எதிராகவுள்ள வெளிவிசைப் பிரிவு

$$= mg \sin\theta$$

∴ இயக்கச் சமன்பாடு

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$= -mg\,\theta$$ [θ மிகவும் சிறியதும் ரேடியன் அளவினதுமாதலால்]

$$\therefore\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g\theta}{l} = -\mu\theta \quad \left[\mu = \frac{g}{l}\right]$$

இது தனியிசை யியக்கச் சமன்பாடாகும்.

∴ ஊசலியின் இயக்கம் X-அச்சை மையமாகக் கொண்ட தனியிசை யியக்கமாகும்.

இதன் அலைவு காலம் $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

∴ தனியூசலியின் அலைவு காலம் $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

ஒரு விநாடியில் n அலைவுகளாயின் $T = \frac{1}{n}$

குறிப்பு.: அலைவு காலம், பொருளின் திணிவைச் சார்ந்ததன்று என அறிகிறோம்.

விநாடி ஊசலி: அலைவு காலம் 2 விநாடியானால் அத்தகைய ஊசலி, விநாடியூசலி (Seconds Pendulum) எனப்படும்.

அதன் நீளம்: $2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$$\therefore\ 1 = \frac{\pi^2 l}{g} \qquad \therefore\ l = \frac{g}{\pi^2}$$

g-ன் மதிப்பு 981 செ.மீ./(விநாடி)^2 ஆனால் $l = 99{\cdot}3$ செ.மீ. என வரும்.

ஒரு நாள் $= 24\times 60\times 60$ விநாடி.

∴ விநாடியூசலியின் ஒரு நாளைய அலைகள் = 43,200

ஆனால் நீளம் கூடவோ குறையவோ செய்தால் இது மாறுபடும். அதுபோன்று 'g' மாறுபட்டாலும் அலைவு காலம் மாறுபடும்.

அலைவுகால மாறுதல்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\therefore\ \log T = \log 2\pi + \tfrac{1}{2}\log l - \tfrac{1}{2}\log g$$

$$\therefore\ \frac{\delta T}{T} = \tfrac{1}{2}\frac{\delta l}{l} - \tfrac{1}{2}\frac{\delta g}{g}$$

(i) 'g' மாறுபடாதாயின் $\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\delta l}{l}$

(ii) 'l' மாறுபடாதாயின் $\frac{\delta T}{T} = -\frac{1}{2}\frac{\delta g}{g}$

குறிப்பு : ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் அலைவுகள் n ஆனால்

$nT = t$ (காலம்)

$$\therefore \frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta n}{n}$$

$\therefore \frac{\delta n}{n} = -\frac{1}{2}\frac{\delta l}{l}$ எனவும் $\frac{\delta n}{n} = \frac{1}{2}\frac{\delta g}{g}$ எனவும் காண்கிறோம்.

இடமாறுதலால் g-ன் மாறுதல் : நியூட்டனின் பொது ஈர்ப்புத் தத்துவத்தால் நாம் அறிவது: பூமிக்கு மேலே ஈர்ப்பு சக்தி, புவி மையத்திலிருந்துள்ள தூரத்தின் வர்க்கத்தின் தலைகீழ் விகிதத்தில் மாறும். பூமிக்குக் கீழே அது தூரத்தின் நேர்விகிதத்தில் மாறும்.

$\therefore g = \frac{k}{r^2}$ (பூமிக்கு மேலே)

$g = \lambda r$ (பூமி மட்டத்திற்குக் கீழே)

$\therefore \frac{\delta g}{g} = -2\frac{\delta r}{r}$ (மேலே) $\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta r}{r}$ (கீழே).

கணக்கு 1. ஒரு வினாடி ஊசலி ஒரு நாளில் 16 விநாடி தாமதமாகப் போகிறது. அதன் நீளத்தை எவ்வாறு மாற்றவேண்டும்?

16 விநாடி தாமத மென்றால், ஒரு நாளில் அலைவுகளில் குறைவு 8.

$\frac{\delta n}{n} = -\frac{\delta l}{2l}$ எனும் சூத்திரத்தில் $\delta n = -8$

$\therefore -\frac{8}{n} = -\frac{\delta l}{2l} \quad \therefore \frac{\delta l}{l} = \frac{16}{n} = \frac{16}{43200}$

$\therefore \frac{\delta l}{l} = \frac{1}{27}\%$.

$\therefore$ நீளம் l-ல் $\frac{1}{27}\%$ குறைக்க வேண்டும். ('l' என்பதை விநாடி ஊசலியின் நீளமாகவே கொள்ளலாம்.)

கணக்கு 2 : பூமி மட்டத்தில் சரியாகவுள்ள விநாடி ஊசலியை ஒரு மலையுச்சிக்குக் கொண்டு சென்றதில், ஒரு நாளைக்கு 10 விநாடி தாமதமாகச் செல்கிறது. மலையுச்சி பூமி மட்டத்திலிருந்து என்ன உயரத்தில் இருக்கிறது?

இங்கு g மாறுகிறது ;

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta g}{2g}. \qquad \frac{\delta g}{g} = -\frac{2\delta r}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{\delta n}{n} = -\frac{\delta r}{r} \qquad \text{ஆனுல் } n = 43200, \quad \delta n = -5$$

$$\therefore \quad \frac{\delta r}{r} = \frac{5}{43200}$$

$$\therefore \quad \delta r = \frac{1}{8640}. r$$

$\therefore$ உயரம், பூமி ஆரத்தில் $\frac{1}{8640}$ பங்கு.

$r = 3960$ மைல் என்ருல்

உயரம் $= \frac{3960}{8640} = \frac{33}{72}$ மைல்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. ஒரு விஞடி ஊசலியின் நீளத்தை 1% அதிகரித்தால் ஒரு நாளில் எவ்வளவு விஞடி தாமதமாகப் போகும். (432 விஞடி.)

2. ஒரு விஞடி ஊசலி ஓர் இடத்தில் ஒருநாளில் 10 விஞடி தாமதமாகவும், மற்ருேர் இடத்தில் 10 விஞடி கூடுதலாகவும் சென்ருல், ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் விகிதமென்ன ? ($\frac{8643}{8649}$)

3. மேலேற்றும் பெட்டி 1 அடி/விஞடி^{2} முடுக்கத்துடன் மேலே செல்கிறது. அதில் உள்ள தனி ஊசலி ஒரு நிமிடத்திற்கு $\frac{14}{15}$ விஞடி கூடுதலாகச் செல்லும் என நிறுவுக.

4. $\frac{1}{2}$ மைல் ஆழமுள்ள சுரங்கத்தின் அடியில் ஒரு விஞடி ஊசலி ஒரு நாளைக்கு 10 விஞடி தாமதமாகச் செல்கிறது. $\frac{1}{2}$ மைல் உயரமுள்ள மலேஉச்சியில் ஒரு நாளைக்குச் சுமார் 15·4 விஞடி தாமதமாகச் செல்லும் என நிறுவுக. (பூமியின் ஆரம் 4000 மைல்.)

5. பூமிமட்டத்தில் 10 விநாடி ஒரு நாளைக்குக் கூடுதலாகச் செல்லும் விஞடி ஊசலி, சுரங்கத்தினடியில் 10 விநாடி தாமதமாகச் செல்கிறது. அதன் ஆழம் என்ன ?

11. நிலைமத் திருப்புதிறன்
(Moment of Inertia)

11·1.

1. நிலைமத் திருப்புதிறன் : m திணிவுள்ள ஒரு துணிக்கை ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து 'r' தூரத்தில் இருக்குமானால் கோட்டைச் சார்ந்த அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன் $(M.I.) \cdot mr^2$ என்பதாம்.

m_1, m_2, m_3......எனும் திணிவுகள் உள்ள பொருள்களின் தூரங்கள் முறையே r_1, r_2......எனவானால், அத்தொகுதியின் கோட்டைச் சார்ந்த $M.I. = \Sigma m_1 r_1^2 \; (= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 ...)$

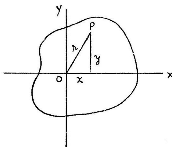
ஒரு விறைபொருள் பல நுண்ணிய துணிக்கைகள் கொண்டது. ஏதேனும் ஒரு நுண்பகுதியின் திணிவு δm ஆகவும் அதன் தூரம் கோட்டிலிருந்து r ஆகவும் ஆனால், கோட்டைச் சார்ந்த $M.I. = \int r^2 \, \delta m$ (உரிய எல்லைக்குட்பட்டது.)

2. சுழலாரை (Radius of Gyration) : பொருட் தொகுதியின் மொத்தத் திணிவு $= M = \Sigma m$. அதன் $M.I. = I$. $I = Mk^2$ என்றால் k என்பது பொருள்தொகுதியின் கோட்டைச் சார்ந்த சுழலாரை எனப்படும்.

3. செங்குத்தச்சுகள் தேற்றம் : ஒரு சமதளத் தகட்டின் தளத்தில் O ஏதேனும் புள்ளியாகுக. OX, OY அதே தளத்தில் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகவுள்ள இரு கோடுகள். OX, OY இரண்டிற்கும் (அதாவது தளத்திற்கு) குத்தாக OZ எனும் கோட்டைக் கொள்வோம். OX, OY, OZ எனும் கோடுகளைச் சார்ந்த $M.I.$ முறையே I_x, I_y, I_z எனில்,

செங்குத்து அச்சுத் தேற்றம் கூறுவது

$$I_z = I_x + I_y$$



படம் 111.

நிரூபணம் : δm திணிவுள்ள துணிக்கை P-ஐத் தகட்டில் கொள்வோம். P-ன் கார்ட்சியக் கூறுகள் (x, y) ஆனால்

$$I_x = \int y^2 \, \delta m$$

$$I_y = \int x^2 \, \delta m$$

$OP = r$ என்றால்

$I_z = \int r^2 \, \delta m$ ஆனால் $\mathbf{r^2 = x^2 + y^2}$

$$\therefore \; I_z = \int r^2 \, \delta m = \int (x^2+y^2) \, \delta m$$

$$\therefore \; I_z = \int y^2 \delta m + \int x^2 \delta m$$

$$\therefore \; \boldsymbol{I_z = I_x + I_y}$$

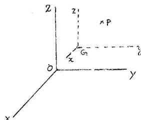
[இத் தேற்றம் சமதளத் தகடுகளுக்கு மட்டுமே பொருந்தும்.]

இணை அச்சுத் தேற்றம் : ஒரு பொருள் தொகுதியின் ஒரு கோட்டைச் சார்ந்த $M.I. = Mk^2$ ஆகுக. அந்தக் கோட்டிற்குப் பொருளின் திணிவுமையம் வழி இணையாகவுள்ள கோட்டைச் சார்ந்த $M.I. = MK^2$ ஆகுக. இரு கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள குத்துத் தூரம் $\boldsymbol{h}$ **எனில்,** தேற்றம் கூறுவது,

$Mk^2 = MK^2 + Mh^2$ அல்லது

$$\boldsymbol{k^2 = K^2 + h^2}$$

நிரூபணம் :



படம் 112.

தரப்பட்டுள்ள கோட்டை Z அச்சாகவும், அதற்குக் குத்தாக OX, OY அச்சுகளையும் கொள்வோம். பொருளின் திணிவு மையத்தின் கூறு (இந்த அச்சுகளைச் சார்ந்தது) (x_g, y_g, z_g) ஆகுக.

∴ அப்போது Oz-லிருந்து C-யின் தூரம் $h = \sqrt{x_g^2 + y_g^2}$

$$h^2 = x_g^2 + y_g^2$$

P என்பது ஏதேனும் துணிக்கையாகுக. Gx, Gy, Gz என்பவை இணை அச்சுகள்.

$OXYZ$ என்பவற்றையொட்டிய P-இன் கூறுகள் X, Y, Z

$Gxyz$.........x, y, z

$$X = x + x_g \quad Y = y + y_g$$

P-ன் திணிவு $= \delta m$

∴ OZ-ஐச் சார்ந்த $M.I. = \int (X^2 + Y^2)\,\delta m = Mk^2$

Gz ...... $M.I. = \int (x^2 + y^2)\,\delta m = MK^2$

$Gxyz$ஐ ஒட்டித் திணிவு மையம் $G\ (0, 0, 0)$ ஆனதால்

$$\int x\,\delta m = 0\ ; \quad \int y\,\delta m = 0$$

$$\begin{aligned} Mk^2 &= \int (X^2 + Y^2)\,\delta m \\ &= \int [(x + x_g)^2 + (y + y_g)^2]\,\delta m \\ &= \int (x^2 + y^2)\,\delta m + \int (x_g^2 + y_g^2)\,\delta m \\ &\quad + \int 2xx_g\,\delta m + \int 2yy_g\,\delta m \end{aligned}$$

$\therefore \; Mk^2 \equiv MK^2 + Mh^2$. [மாற்றிரண்டு உறுப்புக்களும் 0]

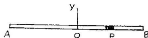
அல்லது $k^2 = K^2 + h^2$

11·2. சில குறிப்பிட்ட விறைபொருள்களின் நிலைம சுழல் திறன் காணல்

(To find the M.I. of Certain specified rigid bodies)

பொருள்கள் யாவும் சீரான அடர்செறிவு (density) உள்ளன எனவும், அது ρ எனவும் கொள்வோம்.

l நீளமுள்ள சீரான கம்பு: அதன் மையம் வழி கோலுக்குக் குத்தான கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம சுழல் திறன்



படம் 113.

AB என்பது நேரான சீரான கம்பு. O அதன் மையம். P எனு மிடத்தில் கம்பின் நுண் பகுதியைக் கொள்வோம். Oவை மூலப்புள்ளி யாகவும் OB திசை x அச்சாகவும் கொள்ள $OP = x$ ஆகுக. நுண் பகுதியின் நீளம் δx.

$\therefore$ அதன் திணிவு $= \rho \delta x$.

[ρ என்பது அலகு நீளத்தின் செறிவு (density)]

OY என்பது AB-க்குக் குத்தான கோடு.

$\therefore$ P எனும் நுண்பகுதியின் OYஐச் சார்ந்த நிலைம சுழல் திறன்

$$= x^2 \rho \, \delta x$$

$$\therefore \text{ முழுக்கம்பின் நிலைம சுழல்திறன்} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \rho \, dx$$

($OA = -\frac{l}{2}$; $OB = +\frac{l}{2}$ ஆனதால், தொகையின் வரம்புகள் இவையாகும்).

$$= 2\int_{0}^{\frac{l}{2}} x^2 \rho dx$$

$$= \frac{l^3 \rho}{12}$$

ஆனால் கம்பின் திணிவு $M = l\rho$

$\therefore$ 'l' நீளமுள்ள கம்பின் அதன் மையம் வழி அதற்குக் குத்தாகவுள்ள கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம சுழல் திறன் $\frac{Ml^2}{12}$ ஆகும்.

சுழலாரம் K எனின் $K^2 = \frac{l^2}{12}$.

குறிப்பு 1 : கம்பின் நீளம் $2a$ எனின்,

$$M.I. = \frac{Ma^2}{3} \; [l = 2a \text{ எனப் பிரதியிடுக}]$$

குறிப்பு 2 : இணை அச்சுக்கள் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தின் கம்பின் ஒரு நுனி வழி அதற்குக் குத்தாகவுள்ள கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம சுழல் திறன் காணலாம். சுழலாரம் k எனின்,

$$k^2 = K^2 + h^2$$

இங்கு $K^2 = \frac{l^2}{12} \quad h = \frac{l}{2}$

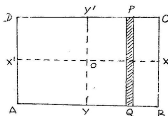
$$\therefore k^2 = \frac{l^2}{12} + \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{3}$$

$\therefore$ நிலைம சுழல் திறன் (கம்பின் நீளம் l ஆனால்)

$$= \frac{Ml^2}{3}$$

செவ்வகத்தின் நிலைம சுழல் திறன் : $ABCD$ என்பது செவ்வகம். O அதன் மையம்.

$X'OX$ நீளத்திற்கு இணையான கோடு; $Y'OY$ அகலத்திற்கு இணையான கோடு; Oவை மூலப் புள்ளியாகவும் $X'OX$, $Y'OY$ என்பவற்றை x, y அச்சுக்களாகவும் கொள்வோம். PQ எனும் நுண் பகுதியின் தூரம் Oவிலிருந்து x ஆகுக; ($PQ \parallel YY'$). இதன் திணிவு δM ஆகுக. PQவின் நீளம் $= l$.



படம் 114.

நீளம் $AB = a$
அகலம் $CB = b$.

$\therefore$ OX எனும் கோட்டைச் சார்ந்த இதன்

நிலைம சுழல் திறன் $= \dfrac{\delta M \,.\, b^2}{12}$

(சென்ற தேற்றத்தின்படி)

முழுச் செவ்வகத்தின், $X'OX$ எனும் கோட்டைச்

சார்ந்த நிலைம சுழல் திறன் $= \int \dfrac{b^2}{12}\,\delta M$

$= \dfrac{Mb^2}{12}$

[அகலம் b சுழல்வதால் சுழலாரம் $\dfrac{b^2}{12}$ எனக் காண்கிறோம்.]

குறிப்பு 1 : இதேபோன்று மையம் வழி, அகலத்திற்கு இணையான கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம சுழல் திறன் $\dfrac{Ma^2}{12}$.

குறிப்பு 2 : செங்குத்துத் தேற்றப்படி செவ்வகத்தின் தளத் திற்குக் குத்தாக அதன் மையம் வழிச்செல்லும் கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம சுழல் திறன் $= M\left(\dfrac{a^2+b^2}{12}\right)$.

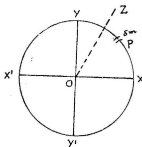
குறிப்பு 3 : (i) செவ்வகத்தின் அகலப் பக்கத்தைச் சார்ந்த நிலைம சுழல் திறன் $\frac{Ma^2}{3}$;

(ii) நீளப் பக்கத்தைச் சார்ந்த நிலைம சுழல் திறன் $\frac{Mb^2}{3}$

(iii) அதன் தளத்திற்குக் குத்தாக ஒருமுனை வழி அமையும் கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம சுழல் திறன் $= M\left(\frac{a^2+b^2}{3}\right)$

குறிப்பு 4 : அகலம் = பக்கம் ஆனால், அதாவது $a = b$ என இட, சதுரத்தின் நிலைம சுழல் திறன் வரும்.

ஒரு வட்டக் கம்பியின் நிலைம திருப்புதிறன் :



படம் 115.

XOX'; YOY' என்பவை ஒரு வட்டத்தின் இரு குத்து விட்டங்கள் ; OZ என்பது அவற்றிற்குக் குத்தாகவுள்ள கோடு. வட்டப் பரிதியில் P எனும் இடத்தில் δm திணிவுள்ள நுண்பகுதி ;

OZ-ஐச் சார்ந்த இதன் நிலைம திருப்புதிறன் $\delta m\ a^2$ ஆகும். (a என்பது வட்டத்தின் ஆரம்)

$\therefore$ முழு வட்டத்தின் OZ-ஐச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன்

$$= \int \delta m \, a^2 = Ma^2$$

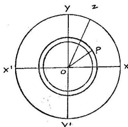
$\therefore$ **ஒரு வட்டக் கம்பிக்கு, அதன் மையம் வழி அதன் தளத்திற்குக் குத்தான கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன்** $= Ma^2$.

குறிப்பு: வட்டக் கம்பிக்கு $X'OX$, $Y'OY$ என்பவை இரு குத்து விட்டங்கள். வட்டம் இரண்டு விட்டங்களையும் சார்ந்து ஒன்று போன்று அமைவதால் $X'OX'$ஐச் சார்ந்த நிலைம திருப்புத்திறன் I என்றால் $Y'OY$ஐச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறனும் I ஆகும். ஆனால் குத்தச்சுத் தேற்றப்படி

$$I + I = Ma^2 \quad (OZ \perp^r X'OX, \; Y'OY \text{ ஆனதால்})$$

$$\therefore \quad I = \frac{Ma^2}{2}$$

வட்டத் தகட்டின் நிலைம திருப்புதிறன்:



படம் 116.

வட்டத் தகட்டின் மையம் O; $X'OX$, $Y'OY$ அதன் இரு குத்து விட்டங்கள். OZ தளத்திற்குக் குத்தாகவுள்ள ஒரு கோடு; வட்டத் தகட்டின் ஆரம் a; $OP = x$ எனின், x ஆரமுள்ள வட்டப் பரிதியின் OZ-ஐச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறனைக் காண்போம். ρ என்பது தகட்டின் அலகு பரப்பின் செறிவாகுக. x ஆரமுள்ள வட்டத்தைச் சுற்றி δx அகலமுள்ள வட்ட வலயத்தின் பரப்பு $2\pi x \, \delta x$. ஆகவே, அதன் திணிவு $\rho 2\pi x \, \delta x$.

OZஐச் சார்ந்த அதன் நிலைம திருப்புதிறன் $= \rho 2\pi x\delta x.x^2$

$\therefore$ OZ-ஐச் சார்ந்த தகட்டின் நிலைம திருப்புதிறன் $= \int_0^a 2\pi\rho x^3 \delta x$

$$= \frac{\pi\rho a^4}{2}$$

ஆனால் தகட்டின் திணிவு $= \pi\rho a^2 = M$

$\therefore$ நிலைம திருப்புதிறன் $= \frac{Ma^2}{2}$

குறிப்பு 1: வட்டத் தகட்டிற்கு அதன் விட்டம் $X'OX$ஐச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன் I என்றால், மற்ற விட்டங்களைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன்களும் I ஆகும்.

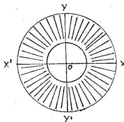
$\therefore$ $Y'OY$ எனும் குத்துவிட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன் I

$$\therefore I + I = \frac{Ma^2}{2}$$

$$\therefore I = \frac{Ma^2}{4}$$

$\therefore$ ஒரு வட்டத் தகட்டிற்கு அதன் விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன் $\frac{Ma^2}{4}$ ஆகும்.

குறிப்பு 2: உள் ஆரம் b, வெளி ஆரம் a உள்ள வட்ட வலயத்தின் நிலைம திருப்புதிறன்.



படம் 117.

$X'OX$ என்ற விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறனைக் காண் போம்.

'b' ஆரமுள்ள வட்டத்தின் திணிவு $= \pi b^2 \rho$

$\therefore$ $X'OX$-ஐச் சார்ந்த $M.I. = (\pi b^2 \rho)\ \frac{b^2}{4} = \frac{\pi b^4 \rho}{4}$

'a' ஆரமுள்ள உள்ள வட்ட வலயத்தின் $M.I. = \frac{\pi a^4 \rho}{4}$

இதை நீக்க

$$\text{வட்ட வலயத்தின் } M.I. = \frac{\pi \rho}{4}\ (b^4 - a^4)$$

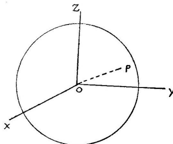
$$= \frac{\pi \rho}{4}\ (b^2 - a^2)\ (b^2 + a^2)$$

$$\text{வட்ட வலயத்தின் திணிவு } M = \frac{\pi \rho\ (b^2 - a^2)}{4}$$

$\therefore$ வட்ட வலயத்தின் விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன்

$$= \frac{M\ (a^2 + b^2)}{4}$$

ஒரு புரைக் கோளத்தின் அதன் விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன்.



படம் 118,

புரைக் கோளத்தின் (Hollow Sphere) மையம் O. OX, OY, OZ என்பவை ஒன்றிற்கொன்று குத்தான ஆரங்கள். இவைகளைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன் I_x, I_y, I_z ஆகுக. கோளமானது எல்லா விட்டங்களையும் சார்ந்து ஒன்று போன்று அமைவதால் $I_x = I_y = I_z$. P என்பது புறப்பரப்பில் உள்ள திணிவு நுண்பரப்பு δA-இல் உள்ள புள்ளி; இதன் திணிவு $\rho\delta A$ [ρ என்பது அலகு பரப்பின் செறிவு]. OX, OY, OZ என்பவற்றை அச்சுகளாகக் கொள்ள P-ன் கூறுகள் (x, y, z) ஆகுக.

$\therefore x^2+y^2+z^2 = a^2$

x அச்சிலிருந்து P-ன் தூரம் $= \sqrt{y^2+z^2}$

$\therefore I_x = \int (y^2+z^2)\, \rho\delta A$

இதேபோல $I_y = \int (z^2+x^2)\, \rho\delta A$

$I_z = \int (x^2+y^2)\, \rho\delta A$

$\therefore I_x+I_y+I_z = 2\int (x^2+y^2+z^2)\, \rho\delta A = 2a^2 \int \rho\delta A$

$\therefore 3I_x = 2\rho A a^2$ (A என்பது புறப்பரப்பு)

$I_x = 2\rho A\dfrac{a^2}{3}$

ஆனால் புரைக் கோளத்தின் திணிவு $M = \rho A$

$\therefore I_x = \dfrac{2Ma^2}{3}$

$\therefore$ **புரைக் கோளத்தின் விட்டத்தைச் சார்ந்த அதன் நிலைம திருப்புதிறன்** $= \dfrac{2Ma^2}{3}$

திடக்கோளத்தின் நிலைம திருப்புதிறன் (M.I. of a solid sphere).

O என்பது திடக் கோளத்தின் மையமாகுக. அதன் ஆரம் a ஆகுக. அதில், r ஆரமுடைய புரைக்கோள நுண் பகுதியைக் கொள்வோம். அதன் கனம் δr ஆகுக. அப்போது அதன் திணிவு $4\pi r^2 \delta r\, \rho$ ஆகும். ஒரு விட்டத்தைச் சார்ந்த இதன் நிலைம திருப்பு திறன்

$$= 4\pi r^2 \delta r\, \rho \cdot \frac{2r^2}{3}$$

$$= \tfrac{8}{3}\pi \rho r^4 \delta r$$

திடக்கோளம், O-விலிருந்து a வரையுள்ள புரைக்கோள நுண்பகுதி களால் ஆனது.

ஆகவே திடக்கோளத்தின், விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன்

$$= \int_0^a \frac{8}{3}\pi\rho r^4 dr$$

$$= \frac{8}{3}\pi\rho \frac{a^5}{5}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\rho a^3 \frac{2a^2}{5}$$

$$= M\frac{2a^2}{5}$$

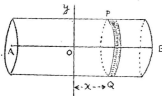
[$M = \frac{4}{3}\pi\rho a^3$, திடக்கோளத்தின் திணிவு ஆகும்].

11·3. சில சாதாரண பொருள்களின் நிலைம திருப்புதிறன் (M.I.)

பொருள்	அளவுகள்	திணிவு மையம் வழி அச்சு	சுழலாரம்
நீண்ட நேர் கம்பு	நீளம் l	குத்தாகவுள்ள அச்சு	$\frac{l^2}{12}$
செவ்வகம்	நீளம் a அகலம் b	நீளத்திற்கு இணையாகத் தளத்தில் அச்சு	$\frac{b^2}{12}$
,,	,,	அகலத்திற்கு இணையாக தளத்தில் அச்சு	$\frac{a^2}{12}$
வட்டக் கம்பி	ஆரம் r	விட்டம்	$\frac{r^2}{2}$
வட்டக் கம்பி	ஆரம் r	தளத்திற்குக் குத்தச்சு	r^2
வட்டத் தகடு	ஆரம் r	விட்டம்	$\frac{r^2}{4}$
வட்டத் தகடு	ஆரம் r	தளத்திற்குக் குத்தச்சு	$\frac{r^2}{2}$
திடக்கோளம்	ஆரம் r	விட்டம்	$\frac{2r^2}{5}$
புரைக்கோளம்	ஆரம் r	விட்டம்	$\frac{2r^2}{3}$

இந்தச் சூத்திரங்களாலும், முற்கூறிய இரு தேற்றங்களாலும் வேறு பல அச்சுக்களைச் சார்ந்த நிலைம திருப்பு திறன்களைக் காணலாம்.

கணக்கு 1: ஓர் உருளையின் குறுக்கு வெட்டின் ஆரம் a, அதன் நீளம் l, என்றால் அதன் அச்சுக்குக் குத்தாகவும், திணிவு மையம் வழியும் செல்லும் கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறனைக் காணவும்.



படம் 119.

AOB உருளையின் அச்சு. O திணிவு மையம். AOB-க்குக் குத்தாக PQ எனும் குறுக்கு வெட்டைக் கொள்க. அதன் தூரம் O-வில் இருந்து x. ஆனால், அதன் தடிப்பம் δx எனக் கொள்வோம். PQ எனும் விட்டத்தை ஒட்டி இதன் நிலைம திருப்புதிறன்

$$= \frac{a^2}{4}\,\delta m$$

OY எனும் கோடு AB-க்குக் குத்தாகுக. $OY \parallel PQ$ ஆனதால் OY எனும் கோட்டை ஒட்டிய PQவின் $M.I.$

$$(\text{இணை அச்சுக்கள் தேற்றப்படி} = \left(x^2+\frac{a^2}{4}\right)\delta m$$

$$\text{ஆனால் } \delta m = \pi a^2 \delta x \rho \quad [\rho\text{-அடர்த்தி எண்}]$$

$$\therefore\ \text{மொத்த } M.I. = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(x^2+\frac{a^2}{4}\right)\pi a^2 \rho\, dx$$

$$= 2\pi a^2 \rho \int_{0}^{\frac{l}{2}} \left(x^2+\frac{a^2}{4}\right) dx$$

$$= 2\pi a^2 \rho \left[\frac{l^3}{24} + \frac{a^2 l}{8}\right]$$

$$= \pi a^2 l \rho \left[\frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{4}\right]$$

ஆனால் $M = \pi a^2 l \rho$

$$\therefore \quad M.I. = M\left[\frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{4}\right]$$

குறிப்பு :

$a = 0$ எனின், உருளை கோலாகும்.

அப்போது $M.I. = \dfrac{Ml^2}{12}$

$l = 0$ எனின், உருளை தகடாகும்.

அச்சு அதன் விட்டமாகும்.

$$M.I. = \frac{Ma^2}{4},$$

இங்கு உருளையின் $M.I.$ இவ்விரண்டின் கூடுதல் என்பதைக் காண்கிறோம்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. அரை வட்டத் தகட்டின், அதன் விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறனைக் கணக்கிடுக.

2. 'a' என்ற ஆரமுள்ள கால் வட்டக் கம்பியின், அதன் ஆரத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறனைக் காணவும்.

3. a என்ற ஆரமுடைய வெட்டு முகமும், l நீளமுமுள்ள உருளையின், அதன் (i) அச்சைச் சார்ந்த (ii) வெட்டு முகத்திற்கு மையத்தில் குத்தாகவுள்ள கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன் காண்க.

4. 'a' ஆரமுடைய திடக் கோளத்திலிருந்து 'b' ஆரமுடைய பொது மையத் திடக்கோளம் நீக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தகைய பந்தின் விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்பு திறனைக் காணவும்.

(விடை: $\dfrac{2M}{5}\ \dfrac{a^5 - l^5}{a^3 - b^3}$)

5. ஒரு திடக்கூம்பின் உயரம் h; அதன் அடிப்பாகத்தின் ஆரம் a; அதன் ஈர்ப்பு மையம் வழி அதன் அச்சுக்குக் குத்தாகவுள்ள ஒரு கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன் $\frac{3M}{80}(h^2+4a^2)$ என நிறுவுக.

கீழ்வரும் பொருள்களின், தரப்பட்டுள்ள அச்சுக்களைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிடுக.

6. திண்ம அரைக்கோளம். அச்சு அதன் அடியில் அமையும் ஒரு விட்டம்.

7. ABC என்ற செங்கோண முக்கோணத் தகடு. $\angle B=90°$; அச்சு BC.

8. ஒரு கூம்பின் உயரம் h. அதன் முனைக்கோணம் 2α.

(i) கூம்பின் அச்சைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன்.

(ii) அச்சுக்குக் குத்தாக முனையில் அமையும் கோட்டைச் சார்ந்த $M.I.$

(iii) கூம்பின் அடியில் உள்ள விட்டத்தைச் சார்ந்த $M.I.$

9. ஒரு வட்டத் தகட்டின் ஒரு விட்டம் AB. B-ல் சமத் திணிவுள்ள துணிக்கை. இவ்விரண்டிற்கும் A-ல் அமையும் தொடு கோட்டை ஒட்டிய நிலைம திருப்பு திறன்.

10. AB என்ற கோலின் நுனி B-ல் ஒரு திடப் பந்து பொருத்தப் பட்டுள்ளது. கோலின் நீளம் $4a$; பந்தின் விட்டம் a. இரண்டும் ஒரே அடர்த்தியுள்ளவை என்றால் A-ல், AB-க்குக் குத்தாக உள்ள அச்சைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன் காண்க.

12. ஒரு நிலை அச்சைச் சுற்றிய விறைபொருளியக்கம்

(Motion of a rigid body about a fixed axis)

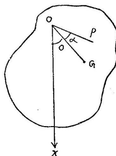
12·1. ஒரு நிலை அச்சைச் சுற்றும் ஒரு விறைபொருளின் இயங்கு ஆற்றல்.

ஒரு விறைபொருள் ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றிச் சுற்றுவதாகக் கொள்வோம். படத்தில் அச்சுக்குக் குத்தாக, விறைபொருளின் திணிவு மையமான G வழியே செல்லும் குறுக்குவெட்டுத் தளம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

GO என்பது அச்சிற்குக் குத்தாக இத்தளத்தில் வரையப்பட்ட கோடு.

OX என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட திசையாகுக.

t நேரத்தில் $\angle XOG = \theta$ என்போம்.



படம் 120.

P என்பது விறைபொருளின் ஏதேனும் ஒரு துணிக்கை. $\angle GOP = \alpha$ என்றும், $OP = x$ என்றும் கொள்வோம். விறைபொருளில் OP-ன் தூரமும், $\angle GOP$-ம் இயக்கத்தின்போது மாறுது.

$\therefore$ P, Oவைச் சுற்றிய வட்டப்பாதையில் இயங்கும்.

$\therefore$ P-ன் வேகம் $v = x \dfrac{d}{dt}(\theta + \alpha)$

ஆனால் $\angle GOP = \alpha$-வும் இயக்கத்தில் மாறாது.

$$\therefore \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

$$\theta = x\frac{d\theta}{dt} = x\dot{\theta}$$

P-ன் திணிவு δm (நுண்கூறு) எனில்,

P-ன் இயங்கு ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\delta m x^2 \dot{\theta}^2$

இதுபோல விறைபொருளின் ஒவ்வொரு துணிக்கைக்கும்

இயங்கு ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\delta m . x^2 . \dot{\theta}^2$

(ஏனெனில் எல்லாவற்றிற்கும் $\dot{\theta}$ ஒன்றாகவே இருக்கும்)

$$\therefore \text{ மொத்த இயங்கு ஆற்றல் } = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\int x^2 \delta m$$

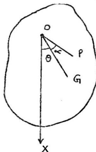
$$= \frac{I\dot{\theta}^2}{2}$$

[I என்பது விறைபொருளின் அச்சைப்பற்றிய நிலைம திருப்புதிறன் $M.I.$]

$I = Mk^2$ என்றால் [விறைபொருளின் திணிவு M],

இயங்கு ஆற்றல் $= \frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$

12·2. பயன்படு விசைகளின் அச்சைச் சுற்றிய சுழல் திறன் (Expression for Moment of effective forces about axis of rotation)



படம் 121.

விறைபொருளின் திணிவு மையம் G என்க.

OX ஒரு குறிப்பிட்ட திசை.

't' நேரத்தில் $\angle XOG = \theta$.

P என்பது விறைபொருளின் ஏதேனும் ஒரு துணிக்கை.

$$\angle GOP = \alpha$$

$$OP = x$$

விறைபொருளாதலால் OP-ன் தூரம் மாறாது.

$\therefore$ P, O-வை மையமாகவுடைய வட்டப் பாதையில் இயங்கும்.

$\therefore$ P-ன் முடுக்கம் $= x\dfrac{d^2}{dt^2}(\theta+\alpha)$ [OPக்குக் குத்தாக θ அதிகரிக்கும் திசையில்]

P-ன் திணிவு δm ஆகுக.

$\therefore$ P-ன் செயல்படு விசையின் அளவு

$$= \delta m . x\frac{d^2}{dt^2}(\theta+\alpha)$$

$$= \delta m . x\frac{d^2\theta}{dt^2} = \delta m\, x\ddot{\theta}$$

$$\left(\alpha \text{ மாறுவதில்லையாதலால் } \frac{d^2\alpha}{dt^2}=0\right)$$

இவ்விசையின் அச்சைப்பற்றிய சுழல் திறன் $= \delta m\, x^2\ddot{\theta}$

இதேபோல மற்றத் துணிக்கைகளுக்கும்.

ஆகவே பயன்படு விசைகளின் சுழல் திறன் $= \int \delta m\, x^2\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta}$ எல்லாவற்றிற்கும் ஒன்றே ஆதலால்

சுழல் திறன் $= \ddot{\theta}\int x^2\,\delta m$

$= I\ddot{\theta} = Mk^2\ddot{\theta}$

$\therefore$ விறைபொருளின்மேல் செயல்படும்

பயன்படு விசைகளின் அச்சைச் சுற்றிய சுழல் திறன் $= Mk^2\ddot{\theta}$

[இங்கு M என்பது விறைபொருளின் மொத்தத் திணிவு; 'k' அச்சைச் சார்ந்த சுழலாரம்].

12·3. அச்சைச் சுற்றிய விறைபொருளின் உந்தச் சுழல்திறன்.

மேற்கூறியபடி துணிக்கையின் வேகம் $= x\dot{\theta}$ (OP-க்குக் குத்தாக)

அதன் உந்தம் $= x\dot{\theta}\,\delta m$

இதன் அச்சைச் சார்ந்த சுழல்திறன் $= x^2\dot{\theta}\,\delta m$

ஆனல் $\dot{\theta}$ எல்லாத் துணிக்கைகளுக்கும் ஒன்றே

$\therefore$ மொத்த உந்தச் சுழல்திறன் $= \dot{\theta}\int x^2\delta m$

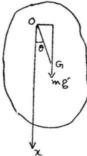
$= I\dot{\theta}$

$= Mk^2\dot{\theta}$

குறிப்பு: மேலே கூறிய மூன்று சூத்திரங்களும் ஒரு விறைபொருளில், ஓர் அச்சு நிலையாக இருந்து இயங்கும்போது அதன் இயக்கத்தை ஆராயப் பயன்படும்.

12·4. கூட்டு ஊசலி (Compound pendulum)

ஒரு விறைபொருள் ஓர் கிடை அச்சைச் சுற்றிச் சிறுகோணத்தில் ஊசலாடினால் அது கூட்டு ஊசலி எனப்படும்.



படம் 122.

கூட்டு ஊசலின் இயக்கம்

விறைபொருளின் திணிவு மையம் G ஆகுக.

GO அச்சுக்குக் குத்து.

OX என்பது கீழ்நோக்கியுள்ள நிலைக்கோடு.

't' நேரத்தில் $\angle XOG = \theta$; $OG = h$.

விறைபொருளின்மேல் செயல்படும் வெளிவிசைகள்

G-யில் கீழ்நோக்கி mg ;

அச்சில் (O-வில்) அளவு, திசைதெரியாத எதிர்விசைகள் இவையாகும். இவ்வெதிர் விசைகளின் அச்சைச் சுற்றிச் சுழல்திறன் பூச்சியமாகும்.

ஈர்ப்பு விசையின் சுழல்திறன் $= -mg\ OG \sin\theta$

$= -mgh \sin\theta$

[சுழல்திறன் θ குறையும் திசையிலிருப்பதால் எதிரெண்ணாகும்.]

ஆனால் பயன்படு விசையின் சுழல்திறன் $= mk^2\ddot{\theta}$

$$\therefore \; mk^2\ddot{\theta} = -mgh \sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-gh}{k^2}\sin\theta$$

θ அளவில் சிறியதாகையால், θ-வை ரேடியனில் கூற,

$$\sin\theta = \theta$$

$$\therefore \; \ddot{\theta} = \frac{-gh}{k^2}\theta$$

இது $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu\theta$ எனும் வடிவில் உள்ளதால்

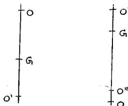
கூட்டு ஊசலியின் இயக்கம் $2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gh}}$ எனும் அலைவு காலமுள்ள தனி யிசை இயக்கமாகும்.

குறிப்பு 1: இதே காலமுள்ள தனியூசலின் நீளம் $l = \frac{k^2}{h}$ இவ்வாறு கூட்டு ஊசலின் காலமுள்ள தனியூசலியைச் சமகாலத் தனி யூசலி (Simple Equivalent Pendulum) என்கிறோம்.

குறிப்பு 2: O என்னும் புள்ளி கூட்டு ஊசலியின் தொங்கல் மையம் (Centre of suspension) ஆகும்.

குறிப்பு 3: OG எனும் கோட்டில் $OO' = \frac{k^2}{h}$ எனும்படி O' எனும் புள்ளியைக் கொள்க. O' எனும் புள்ளி அலைவு மையம் (Centre of oscillation) என அழைக்கப் பெறும்.

12·4-1. தேற்றம்: ஒரு கூட்டு ஊசலியின் அலைவு மையத்தைத் தொங்கல் மையமாகக் கொண்டால் தொங்கல் மையம் அலைவு மையமாக மாறும்



படம் 123.

நிரூபணம் : $OO' = \frac{k^2}{h}$

பொருளின் திணிவு மையம் வழி உள்ள இணையான கோட்டைச் சார்ந்த சுழலாரம் K ஆகுக.

அப்போது $k^2 = K^2 + h^2$

$$\therefore \quad OO' = \frac{K^2+h^2}{h} = \frac{K^2}{h} + h$$

$$OG + GO' = \frac{K^2}{h} + h$$

ஆனால் $OG = h$

$$GO' = \frac{K^2}{h} = \frac{K^2}{OG}$$

$$\therefore \quad OG \cdot O'G = K^2$$

O' தொங்கல் மையமானால் O'' அலைவு மையமாகுக.

$$O'G \cdot O''G = K^2$$

$$\therefore \quad OG = O''G$$

O'' எனும் புள்ளி O-ல் அமைகிறது.

அதாவது O' தொங்கல் மையமானால் O அலைவு மையமாகிறது.

12·4–2. கூட்டு ஊசலியின் மிகச் சிறு அலைவு காலம்

தொங்கல் மையம் மாற மாற அலைவு காலமும் மாறும்.

$$\text{அலைவு காலம்} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gh}}$$

$\therefore \quad \frac{k^2}{h}$ மிகச் சிறிய மதிப்பானால் அலைவு காலமும் மிகச் சிறிய மதிப்பாகும்.

K என்பது திணிவு மையம் வழி சுழலச்சுக்கு இணையான அச்சைச் சார்ந்த சுழலாரம் ஆகுக.

$$\therefore \quad k^2 = K^2 + h^2$$

$$\therefore \quad \frac{k^2}{h} = \frac{K^2}{h} + h$$

ஆனால் $\frac{K^2}{h} \times h = K^2$ (மாறு எண்)

ஆகவே $\frac{k^2}{h}$-ன் மிகச் சிறிய மதிப்பு,

அதாவது, $\frac{K^2}{h} + h$-ன் மிகச் சிறிய மதிப்பு

$$\frac{K^2}{h} = h \text{ எனும்போது ஆகும்.}$$

(இயற்கணிதம்—சமனின்மைத் தேற்றம்)

$$\therefore \quad h = K$$

அப்போது $\frac{k^2}{h} = 2K$

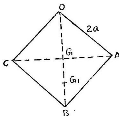
கூட்டு ஊசலிக் கணக்குகள்

கணக்கு : ஒரு சதுரத் தகட்டின் பக்க நீளம் $2a$. அதன் ஒரு முனையில், சமத் திணிவுள்ள ஒரு துணிக்கை பொருத்தப்பட்டுள்ளது. எதிர்முனையிலிருந்து அதைத் தொங்கவிட்டால் வரும் கூட்டு ஊசலியின் காலத்திற்குச் சம காலமுள்ள தனி ஊசலியின் நீளமென்ன?

தனி ஊசலி காணச் சூத்திரம்

$$l = \frac{k^2}{h}.$$

இங்கு k என்பது தகடு. துணிக்கை சேர்ந்த தொகுதியின் O-வைச் சுற்றிய சுழலாரம். 'h' என்பது பொதுத்திணிவு மையத்தின் O-விலிருந்துள்ள தூரம்



படம் 124.

$OABC$ சதுரமானால்,

$OG = \sqrt{2}\,a \qquad CB = \sqrt{2}\,a$

பொதுத் திணிவு மையம் GB-யின் நடுப்புள்ளி G.

$$\therefore \text{ '}h\text{'} = \sqrt{2}\, a + \frac{\sqrt{2}\, a}{2}$$

$$h = \frac{3}{2}\sqrt{2}\, a = \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

O-வைச் சுற்றிய சதுரத்தின் $M.I. = m\left(\frac{4a^2}{3} + \frac{4a^2}{3}\right)$

$$= \frac{m \cdot 8a^2}{3}$$

துணிக்கையின் $M.I. \quad = m \cdot (2\sqrt{2}\, a)^2$

$$= m\, 8a^2$$

$\therefore$ மொத்த $M.I. = \frac{m \cdot 32}{3} a^2$

மொத்தத் திணிவு $= 2m$

$$\therefore k^2 = \frac{16}{3} a^2$$

$$\therefore l = \frac{16a^2}{3} \div \frac{3a}{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{9} a$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $\frac{1}{2}$ அடி விட்டமுள்ள திடக்கோளம் 5 அடி நீளமுள்ள நூலால் தொங்கவிடப்பட்டு ஊசலாடுகிறது. இதற்குச் சமமான தனியூசலியின் நீளம் யாது?

[(விடை $\simeq$ 5·25 ft) $= \frac{2207}{420}$]

2. ஒரு வட்டத் தகட்டில் மையத்தினின்று h தூரத்தில் ஓர் அச்சு, தகட்டின் தளத்திற்குக் குத்தாக உள்ளது. இந்த அச்சு கிடையாக இருக்கும்போது, தகடு உராய்வின்றி அச்சைச் சுற்றி ஊசலாடுகிறது. இதன் அலைவு காலத்தைக் கணக்கிடுக.

$$\left(\pi\sqrt{\frac{2a^2+4h^2}{gh}}\right)$$

3. ஒரு திடமான கோலின் நீளம் a; திணிவு m. கோல் அதன் ஒரு நுனியில் உள்ள கிடை அச்சிலிருந்து தொங்குகிறது. மற்றொரு நுனியில் சமத் திணிவுள்ள துணிக்கை பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இந்தக் கோலின் அலைவு காலம் என்ன? அலைவு காலம் விஞடியாக இருக்க அதன் நீளம் என்ன?

$$\left(4\pi\sqrt{\frac{2l}{9g}}\,;\; 9/\pi^2 \text{ ft}\right)$$

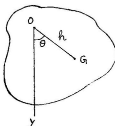
4. ஒரு கோலின் நீளம் $2a$; அது மிகச் சிறிய காலத்துடன் ஊசலாட ஒரு கிடை அச்சு எங்கு இருக்கவேண்டும்?

$$\left(\text{நடுப்புள்ளியிலிருந்து } \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ தூரத்தில்.}\right)$$

5. ஒரு வட்டத்தகடு, அதன் தளத்திலேயே அமையும் அச்சைச் சுற்றி ஊசலாடுகிறது. அலைவு காலம் மிகவும் குறுகியதாக இருக்க அச்சு எங்கே இருக்கவேண்டும்?

6. ஒரே சீரான திடக் கூம்பு வடிவத்தின் உயரம் h; முனைக் கோணம் 2α. முனைவழி உள்ள கிடை அச்சிலிருந்து தொங்கி ஊசலாடுகிறது. இதற்குச் சமமான தனியூசலின் நீளம் $\frac{h}{5}(4+\tan^2\alpha)$ என நிறுவுக. (M. U. April 61)

12·5. கிடை அச்சைச் சுற்றிய இயக்கம்



படம் 125.

விறைபொருளின் திணிவு மையம் G. O தொங்கல் மையம். OX கீழ்நோக்கியுள்ள நிலைக்கோடு.

't' நேரத்தில் $\angle XOG=\theta$.

G, O-வுக்கு நேர் கீழாக இருக்கும்போது 'ω' எனும் கோண வேகத்துடன் சுழல்கிறது எனக் கொள்வோம்.

ஆற்றல் காப்பு விதிப்படி,

t நேரத்தில் மொத்த ஆற்றல் = தொடக்க நேரத்தில் உள்ள ஆற்றல்

$$\therefore \tfrac{1}{2} mk^2 \dot{\theta}^2 - mgh \cos\theta = \tfrac{1}{2} mk^2 w^2 - mgh$$

$$[K.E + P.E \text{ at } t] = [K.E + P.E \text{ at } t = 0]$$

விறைபொருள் சரியாக ஒரு சுற்று வர

$\theta = \pi$ எனும்போது $\dot{\theta} = 0$ ஆகவேண்டும்.

$$\therefore \; mgh = \tfrac{1}{2} mk^2 w^2 - mgh$$

$$\therefore \; w^2 = \frac{4gh}{k^2}$$

$\therefore \; \frac{2}{k}\sqrt{gh}$ எனும் கோணவேகத்துடன் கீழிருந்து புறப்பட்டால், சரியாக ஒரு சுற்று வரமுடியும்.

$w < \frac{2}{k}\sqrt{gh}$ என்றால் முழுச்சுற்று வரமுடியாது.

கணக்கு 1: 'l' நீளமுள்ள ஒரு நேரான கம்பு அதன் ஒரு நுனியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. அது என்ன வேகத்துடன் சுழல ஆரம்பித்தால் முழுச்சுற்று வரமுடியும்?

இங்கு $k^2 = \frac{l^2}{3}$ $\quad h = \frac{l}{2}$ $\quad \therefore \; \frac{k^2}{h} = \frac{2}{3} l$

$\therefore \; w^2 > \frac{4g.3}{2l}$ $\quad \therefore \; w^2 > \frac{6g}{l}$ $\quad \therefore$ குறைந்தது

$\sqrt{\frac{6g}{l}}$ கோணவேகத்துடன் சுழலத் தொடங்கினால் முழுச் சுற்று வரமுடியும்.

கணக்கு 2. ஓர் அச்சைச் சுற்றிச் சுழலும் சக்கரத்தைச் சுற்றி 10 அடி நீளமுள்ள கயிறு சுற்றப்பட்டுள்ளது. நூலை ஒரே சீரான 50 பவு. எடை விசையால் இழுத்து நூலை முற்றிலும் எடுத்ததும் நிமிடத்திற்கு 100 சுற்றுவேகத்துடன் சக்கரம் சுழலுகிறது. அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன் $\frac{90g}{\pi^2}$ எனக் காட்டுக. (M.U.)

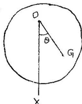
சக்கரத்தின் இயங்கு ஆற்றல் = செய்யப்பட்ட வேலை

இயங்கு ஆற்றல் சூத்திரப்படி = $\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$

$$\dot{\theta} = \frac{200\pi}{60}$$

$$\text{செய்யப்பட்ட வேலை} = \text{விசை} \times \text{தூரம்}$$
$$= 50g \times 10$$
$$= 500g$$
$$\therefore \tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = 500g$$
$$I = \frac{1000g}{\dot{\theta}^2} = \frac{1000g \times 60 \times 60}{200 \times 200 \times \pi^2}$$
$$= \frac{90g}{\pi^2} \text{ அலகு}$$

கணக்கு 3. ஒரு வட்டத்தகடு கிடைதொடுகோட்டிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. தகட்டின் திணிவு 3 பவு. ஆரம் 1 அடி. அதன் மையத்தில் தகட்டிற்குக் குத்தாக 15 பவு./அடி தாக்களவு உள்ள படி கொடுக்கப்படுகிறது. அது எவ்வளவு மேலே கோணம் சுற்றிக் கீழே இறங்கும் என்பதைக் கணக்கிடுக.



படம் 126.

ஏதேனும் ஒரு பொருளுக்கு C திணிவு மையம் ஆகுக.

O தொங்கல் மையம் $= OC = h.$ திணிவு $m.$

OX நேர்கீழாகவுள்ள நிலைக்கோடு

't' நேரத்தில் $XOC = \theta$

ஆற்றல் காப்புக் கொள்கைப்படி

't' நேரத்தில் இயங்கு ஆற்றல் + நிலைஆற்றல்

= புறப்படு இயங்கு ஆற்றல் + நிலை ஆற்றல்

$$\therefore \tfrac{1}{2}mk^2\dot{\theta}^2 - mgh\cos\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}mk^2w^2 - mgh$$

$\theta = \alpha$ எனும்போது

$\dot{\theta} = 0$ என்றால் $2gh\,(1-\cos\alpha) = k^2w^2$

இங்கு $'k^2' = \frac{a^2}{4}+a^2 = \frac{5a^2}{4} = \frac{5}{4}$ ($a=1$ ஆனதால்)

$h = a = 1 \quad g = 32$

ω-வைக் கணக்கிட

உந்த மாறுதலின் சுழல்திறன் = கணத்தாக்கு விசையின் சுழல்திறன்

$$\therefore\ mk^2w = 15a$$

$$\frac{3 \cdot 5}{4}\ w = 15a$$

$$\therefore\ w = 4a = 4$$

பிரதியிட $2 \times 32 \times 1\ (1-\cos\alpha) = \frac{5}{4} \cdot 16$

$$\therefore\ 1-\cos\alpha = \frac{5}{16}$$

$$\cos\alpha = \frac{11}{16} = .6875$$

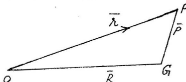
$$\therefore\ \alpha = 46^\circ\ 34'$$

∴ தகடு 46° 34′ கோணம் மேலாகச் சுற்றி இறங்குகிறது.

12.6. விறைபொருளின் சமதள இயக்கம்

ஒரு விறை பொருளின் துணிக்கைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு சமதளத்திற்கு இணையாகவுள்ள சமதளங்களில் தொடர்ந்து இயங்கினுல், அது சமதள இயக்கமெனப்படும். உதாரணமாய் ஒரு பந்து ஒரு விட்டத்தை அச்சாகக்கொண்டு சுழல்கிறது. அச்சின் திசை மாறாது இருந்தால், ஒவ்வொரு துணிக்கையும் அச்சுக்குக் குத்தாகவுள்ள இணைச் சமதளங்களில் இயங்கும். இத்தகைய இயக்கம் சமதள இயக்கமாகும்.

ஒரு விறைபொருளின் இயங்கு ஆற்றல்



படம் 127.

O எனும் புள்ளியை மூலப் புள்ளியாகக் கொள்வோம். g என்பது திணிவு மையம் $\overline{OG} = \overline{R}$. P என்பது விறைபொருளின் ஒரு துணிக்கை. $\overline{OP} = \overline{r}$; $\overline{GP} = \overline{\rho}$

$$\therefore \overline{r} = \overline{R} + \overline{\rho}$$

துணிக்கையின் திணிவு $= m$. அதன் வேகம் $= \dot{\overline{r}}$

$\therefore$ துணிக்கையின் இயங்கு ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m \dot{\overline{r}} \cdot \dot{\overline{r}}$

$$= \frac{1}{2} m \left[\dot{\overline{R}}^2 + \dot{\overline{\rho}}^2 + 2\dot{\overline{R}} \cdot \dot{\overline{\rho}}\right]$$

$\therefore$ விறைபொருளின் இயங்கு ஆற்றல் $= T$ என்றால்

$$2T = \Sigma m \dot{\overline{R}}^2 + \Sigma m \dot{\overline{\rho}}^2 + \Sigma m \, 2\dot{\overline{R}} \cdot \dot{\overline{\rho}}$$

ஆனால் எல்லாத் துணிக்கைகளுக்கும் $\dot{\overline{R}}$ பொது.

அன்றியும் மொத்தத் திணிவு $M = \Sigma m$; திணிவு மையம் விளக்கத்தின்படி $\Sigma m \dot{\overline{\rho}} = 0$

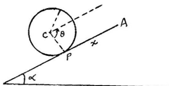
$$\therefore \quad 2T = M\dot{\overline{R}}^2 + \Sigma m \dot{\overline{\rho}}^2$$

ஆகவே கீழ்வரும் தேற்றம் வருகிறது. விறைபொருளின் இயங்கு ஆற்றல் = விறைபொருளின் திணிவுக்குச் சமமான துகள் ஒன்று அதன் திணிவு மையத்தில், திணிவு மையத்துடன் இயங்கினால் உள்ள ஆற்றலும், திணிவு மையம் நிலை எனக்கொண்டு அதை விறைபொருள் சுற்றுவதால் ஏற்படும் ஆற்றலும் கூடியதாகும். இவ்வாறு இயங்கும் விறைபொருளின் இயங்கு ஆற்றலைக் காணவேண்டும். இடப் பெயர்ச்சியால் ஏற்படும் ஆற்றலும், சுழல்வதால் ஏற்படும் ஆற்றலும் என இருவகை இயங்கு ஆற்றலின் கூடுதலாகும்.

விறைபொருளின் நிலை ஆற்றல் (Potential Energy) : விறை பொருளின் துணிக்கைகள் யாவும் திணிவு மையத்தினின்று நிலையான தூரத்தில் இருப்பதால், சமத்திணிவுள்ள ஒரு துகள் திணிவு மையத்தில் இருந்தால் என்ன நிலைஆற்றல் உண்டோ அதுவே விறைபொருளின் நிலைஆற்றல் ஆகும்.

விறைபொருளின் பொது இயக்கம் : ஆற்றல் காப்பு விசைகள் செயல்படும்போது இயக்கச் சமன்பாட்டை ஆற்றல் காப்பு விதியினின்று எழுதலாம். t_1 நேரத்தில் மொத்த ஆற்றல் $= t_2$ நேரத்தில் மொத்த ஆற்றல் என்பது அச் சமன்பாடு.

கணக்கு : α° சாய்வுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் மேலிருந்து ஒரு திடப்பந்து உருள்கிறது. அதன் முடுக்கம் என்ன ?



படம் 123.

't' நேரத்தில் பந்தின் மையம் சென்ற தூரம் x ஆகுக. CQ எனும் ஆரம் தளக் குத்துடன் θ° கோணச்சாய்வில் உள்ளது. P எனும் புள்ளி பந்து தளத்தைத் தொடும் இடம். A என்ற இடத்தில் $t=0$ எனும்போது P இருந்தது.

$\therefore \quad AP = x$; முற்றிலும் உருள்வதால்

வில் $a\theta = x$

$\therefore \quad a\theta = x \qquad \therefore \quad a\dot{\theta} = \dot{x}. \quad a\ddot{\theta} = \ddot{x}$

't' நேரத்தில் பந்தின் இயங்கு ஆற்றல் $= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mk^2\dot{\theta}^2$

(இங்குப் பந்து மையம் வழி கிடை அச்சைச் சுற்றிச் சுழல்கிறது.)

't' நேரத்தில் அதன் நிலை ஆற்றல் $= -mgx \sin \alpha$

$t = 0$ எனும்போது மொத்த ஆற்றல் $= 0$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}mk^2\dot{\theta}^2 - mgx \sin \alpha = 0$$

$$\therefore \quad \dot{x}\ddot{x} + k^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - g\dot{x} \sin \alpha = 0$$

$$\dot{x}\ddot{x} + \frac{k^2\dot{x}\ddot{x}}{a^2} - g\,\dot{x} \sin \alpha = 0$$

$$\therefore \quad \ddot{x}\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right) = g \sin \alpha$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)}$$

(i) திடப் பந்தானால் $k^2 = \frac{2a^2}{5}$ $\therefore$ $\ddot{x} = \frac{5}{7}g \sin \alpha$.

(ii) புரைப் பந்தானால் $k^2 = \frac{2a^2}{3}$ $\therefore$ $\ddot{x} = \frac{3}{5}g \sin \alpha$.

(iii) திட உருளையானால் அல்லது வட்டத் தகடானால் $k^2 = \frac{a^2}{2}$ $\ddot{x} = \frac{2}{3}g \sin \alpha$.

(iv) புரை உருளை அல்லது வட்ட வளைமானால் $k^2 = a^2$ $\ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{2}$.

1392—26

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை.

1971 ஏப்ரல் வரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

			ரூ.	பை.
*1.	பொருளாதாரம்—I	... சி. வேலாயுதம்	... 6	50
*1-A	,, II	... ,,	... 9	00
*2.	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	... டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ்	... 4	25
*3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	... ,,	... 4	50
*4.	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு	... சோணாசலம்	... 7	00
*5.	பன்னாட்டு வாணிபம்	... மு. ஆரோக்கியசாமி	... 6	00
6.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	... திருமதி. ஆர். தாமரஜாட்சி	... 12	00
7.	பொருளாதாரம் ஓர் அறிமுகம்—I	... தி. சி. மோகன்	... 12	00
8.	,, II	... எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	... 10	75
9.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	... க. முத்தையன்	... 7	00
*10.	பணவியலும் பாங்கியலும்—I	... சி. வேலாயுதம்	... 6	75
*11.	,, II	... ,,	... 11	50
*12.	நவீன பாங்கு இயல்	... க. வெற்றிவேல்	... 5	00
*13.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	... பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	... 5	50
*14.	அரசாங்க நிதி இயல்	... அர. சேஷாசலம்	... 4	75
15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	... எம். பாலசுப்பிரமணியன்	... 10	00
16.	,, II	... எம். லூர்துநாதன்	... 4	25
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	... சி. சுந்தரராஜன்	... 10	75

* மூலநூல் (Original Book)

* மூலநூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
18.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, II	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, II	பி. வி. சீநிவாசன்	6	00
24.	,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறுவிளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடையபிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	சூ. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	50
34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00
35.	பன்னுட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
36.	,, II	சே. எஸ். இராமசாமி	9	00
37.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
38.	,, II	,,	7	00
39.	வளர்ச்சியுறாத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4	25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
41.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விளைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50
42.	பொருளாதார வளர்ச்சி பற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7	75

43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857—1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7	00
44.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு. வி. சீனிவாசன்	6	25

வரலாறு

*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி. ர. அனுமந்தன்	4	50
*46.	,, II	,,	3	50
*47.	,, III	,,	7	25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I	டி. வி. சொக்கப்பா	4	50
49.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்துநூற்றுண்டுகாலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	15	00
50.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணுமலை	13	00
51.	,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13	00
52.	,, III	என். ஜே. ராஜகோபால்	8	00
53.	,, IV	,,	8	00
54.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15	00
55.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	3	00
56.	,, III	,,	5	00
57.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	7	50
58.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	9	00
59.	,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	11	00
60.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஜ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
61.	,, II	,,	7	00
62.	,, III	பி. இராமாநுஜம் தேவதாஸ்	7	75
63.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
64.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
65.	,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50
66.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50

* மூலநூல் (Original Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	பை.
67.	முகலாயப் பேரரசு II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75
68.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
69.	,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணாமலை	6	75
70.	,, III	இரா. அண்ணாமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
71.	,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00
72.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
73.	,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	6	75
74.	,, III	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50
75.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	பா. மாணிக்கவேலு	5	00
76.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00

அரசியல்

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	பை.
77.	அரசியல் அமைப்புகள்	ஜே. இராமச்சந்திரன்	4	62
78.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	மோ. கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	7	50
79.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
*80.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
81.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
82.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	திருமதி. நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
83.	,, II	,,	13	25
84.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
85.	,, II	இ. ஜெகதீசன்	7	25
86.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
87.	,, II	டி. செல்லப்பா	7	50
88.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9	25
89.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
90.	,, II	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	5	75
91.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	7	25

*92.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
93.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்—I	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
94.	சமூக அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	7	00
95.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
96.	,, II	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
97.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

98.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
99.	,, II	,,	7	00
100.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
101.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
102.	,, II	,,	9	00
103.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
104.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரிப்பரராஜ்	11	00
105.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3	00
*106.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25
*107.	உளநலவியல்	டாக்டர் தா. ஏ. சண்முகம்	6	00

தத்துவம்

108.	இந்து சமயத் தத்துவம்	ஞா. ராஜாபகதூர்	5	50
*109.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	3	50
*110.	மேலை நாட்டுத் தத்துவம்	ஆர். எஸ். தேசிகன்	3	50
111.	அத்துவித தத்துவம்	கோ. மோ. காந்தி	6	50
112.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	5	50
113.	இந்தியத் தத்துவம்—I	வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முக சுந்தரம்	3	50

* மூலநூல் (Original Book)

		ரூ.	பை.
தத்துவம் (தொடர்ச்சி)			
114. இந்தியத் தத்துவம் II	வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முக சுந்தரம்	6	00
115. மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I	சி. இராமலிங்கம்	6	00
அறவியல்			
116. அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	கோ. மோ. காந்தி	8	50
அளவையியல்			
117. அளவையியல் தொடக்க நூல்	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	2	50
மானிடவியல்			
*118. மானிடவியல்	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	4	75
119. பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	கி. பூ. சுப்பிரமணியம்	5	50
120. இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	எஸ். இலட்சுமி	3	50
சமூகவியல்			
121. சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	ஜே. நாராயணன்	10	50
புவியியல்			
122. ஆசியா—I	கொ. சேஷ நரசிம்மன்	9	50
123. ,, II	,,	8	75
124. ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	ஏ. எஸ். நாராயணன்	8	50
*125. தென்கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	8	50
*126. வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அனுமேனு	6	25
*127. தென் அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	9	00
*128. தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	3	00
*129. ,, —ஆஃப்ரிக்கா	எஸ் முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	3	25
*130. புவிப்புறவியல்—II	நா. அனந்தபத்மநாபன்	6	00

புவியியல் (தொடர்ச்சி)

*131.	செய்முறைப் புவியியல்	...	சு. ஜெயச்சந்திரன்	... 5	50
*132.	மக்கட்பரப்பியல்	...	வி. எஸ். அனந்தபத்மனுபன்	... 4	75
*133.	சமுத்திரவியல்	...	கோ. இராமசாமி	... 6	50
134.	காலநிலை இயல்—I	...	கொ. சேஷ நரசிம்மன்	... 10	00
135.	,, II	...	,,	... 5	00
*136.	காலநிலை இயல்—I	...	திருமதி. இராதா	... 10	00
*137.	,, II	...	,,	... 8	00
138.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	...	கோ. இராமசாமி	... 11	00
*139.	புவி அமைப்பு இயல்	...	சி. விஸ்வநாதன்	... 4	75
140.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	...	கோ. இராமசாமி	... 6	00
141.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	...	எஸ். மாணிக்கம்	... 9	50
142.	,, II	...	எம். கார்த்திகேயன்	... 12	00
143.	,, III	...	சி. எஸ். நரசிம்மன்	... 5	75

புள்ளியியல்

*144.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	...	சு. வைத்தியநாதன்	... 10	75
145.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	...	கோ. சண்முகசுந்தரம்	... 10	00
146.	,, II	...	இராஜகோபாலன்	... 14	00
147.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	...	தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	... 6	50

உயர் கணிதம்

*148.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	...	டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	... 4	25
*149.	வகை நுண்கணிதம்	...	,,	... 3	00
*150.	தொகை நுண்கணிதம்	...	தி. கோவிந்தராசன்	... 3	25

விலங்கியல்

*151.	விலங்கியல்	...	பெ. மா. அண்ணுமலை, இரா. முருகேசன்	... 12	00

* மூலநூல் (Original Book)

			ரூ.	பை.
பௌதிகவியல்				
152.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து	10	00
விஞ்ஞானம்				
*153.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	00
*154.	ரேடியோ	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம்	4	75
*155.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4	50
*156.	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணாமலை	3	50
*157.	தாவரம்-வாழ்வும் வரலாறும்	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8	00
*158.	கரும்பு	கு. பெரியசாமி	4	00
*159.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தம்	6	50
மருத்துவம்				
*160.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2	50
161.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை	8	25
*162.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2	50
163.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
164.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது	6	75
165.	,, II	,,	5	50
166.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7	25
பொறியியல்				
167.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8	50

கூட்டுறவு

168.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5	50

சட்டம்

*169.	குற்றவியல் சட்டம்	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10	00

பொது நூல்கள்

170.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3	25
171.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8	00
*172.	சேமக் கை-நூல்	ஆ. சுப்பிரமணியம்	2	50
*173.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9	00
*174.	உணவும் ஊட்டமும்	தி. வேங்கட கிருஷ்ணய்யங்கார்	4	50
*175.	பள்ளி நிருவாக அமைப்பு—அடிப்படைக் கருத்துகள்	எஸ். சந்தானம், எஸ். ஏ. துரைசிங்	6	25

புகுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை

*176.	உலக வரலாறு	டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	4	00
*177.	பொருளாதாரம்	ஜி. சிதம்பரம்	2	75
*178.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	2	50
*179.	,, II	,,	2	25
*180.	பௌதிகம்	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	7	50
*181.	புகுமுக பௌதிகம்	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	00
*182.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	கே. ராஜகோபாலன்	7	00
*183.	,, II	,,	3	00
*184.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	7	00

* மூல நூல் (Original Book)

புகுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
*185.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல் II	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	4	50
*186.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	ஆர். மகாதேவன்	4	75
*187.	,, II	,,	3	25
*188.	வேதியியல்	பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	7	00
*189.	புகுமுக வேதியியல்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	5	50
*190.	விலங்கியல்	எஸ். ஆப்ராகாம்	4	00
*191.	புகுமுக விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணாமலை	7	25
*192.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	எஸ். சுந்தரம்	4	00

பட்டப்படிப்பிற்குரிய (பி.எஸ்ஸி.) நூல்கள்

(அடக்க விலைப் பதிப்புகள் – கழிவு இல்லை)

பௌதிகம் (Physics)

*193.	எந்திரவியல்—சிறப்புப் பாடம் (Book I) (Mechanics-Major)	ஆர். நாகராசன்	6	25
*194.	,, (Book II)	,,	5	50
*195.	வெப்பவியல்—சிறப்புப் பாடம் (Heat-Major)	கே. நாச்சிமுத்து	5	25
*196.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம் (Practical Physics-Major) (Book I)	டி. கமலக்கண்ணன், ஆர். கிருட்டிணசாமி	4	50
*197.	,, (Book II)	,,	3	25
*198.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம்-I (Book I) (Physics Heat-Ancillary)	பி. தங்கராஜன்	4	00
*199.	,, (Book II)	,,	3	00
*200.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப் பாடம் (Physics Practical-Ancillary)	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம்	4	50

பௌதிகம் (தொடர்ச்சி)

*201.	மின்னியல்-காந்தவியல்—சிறப்புப் பாடம் (Electricity and Magnetism-Major (Book I)	டி. ஏ. கருப்பண்ணன்	4	75
*202.	,, (Book II)	,,	4	50
*203.	,, (Book III)	,,	4	25
*204.	ஒளியியல்—சிறப்புப் பாடம் (Light-Major)	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், ,, ஆர். சபேசன்	7	75
*205.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி - 2) (Physics-Ancillary) முதல் புத்தகம்	கா. வே. சுப்பிரமணியன்	6	00
*206.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி - 2) இரண்டாம் புத்தகம்	,,	4	50
*207.	பொது பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம் (General Physics-Major)	கே. பி. கந்தசாமி	4	50
*208.	இன்றைய பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம் (Modern Physics-Major)	எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	75
*209.	ஒலி நூல்—சிறப்புப் பாடம் (Sound-Major)	டி. முருகையன்	5	00
*210.	இயக்கவியல்—சிறப்புப் பாடம் (Dynamics-Major)	ஆர். மகாதேவன், கே. சிவசுப்பிரமணியம், பி. ஆர். சுப்பிரமணியம்		

வேதியியல் (Chemistry)

*211.	செய்முறை கனிம வேதியியல்—துணைப் பாடம் (Practical Inorganic Chemistry-Ancillary)	டாக்டர் முத்துக்குமாரசுவாமி	2	00

*மூல நூல் (Original Book)

வேதியியல் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
*212.	செய்முறை கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம் (Practical Inorganic Chemistry-Major)	டி. இராமலிங்கம்	2	25
*213.	பௌதிக வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம் (Physical Chemistry-Major) (Book I)	டி. சக்திவேலு	4	00
*214.	,, (Book II)	,,	3	50
*215.	கனிம வேதியியல்—துணைப் பாடம் (Inorganic Chemistry-Ancillary)	சி. ஏ. பத்மநாபன்	6	50
*216.	கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம் (Inorganic Chemistry-Major) (Book I)	பி. டி. முனியப்பா	4	00
*217.	,, (Book II)	,,	4	25
*218.	பொது பௌதிக வேதியியல்—துணைப் பாடம் (General Physical Chemistry-Ancillary)	ஆர். துளசிதாஸ்	4	75
*219.	அறிமுறை வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம் (Theoretical Chemistry-Major) (Book I)	ஓ. ஆர். சூரியநாராயணன்	4	50
*220.	,, (Book II)	,,	3	75
*221.	செய்முறை கரிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம் (Practical Organic Chemistry-Major)	என். ஆறுமுகம்	3	50
*222.	அங்கக வேதியியல்—துணைப் பாடம் (Organic Chemistry-Ancillary)	பி. எல். இராமசாமி	5	00
*223.	அங்கக வேதியியல்-I (Organic Chemistry-I)	எம். ஆட்கொண்டான்	3	00
*224.	கரிம வேதியியல்—பகுதி-I (இரண்டாம் புத்தகம்) (Organic Chemistry-Part-I-Book II)	திரு. கண்ணபிரான்	4	75
*225.	,, (மூன்றும் புத்தகம்) (Book III)	,,	3	25

*226.	கரிம வேதியியல்—பகுதி-2 (முதல் புத்தகம்) (Organic Chemistry-Part-II-Book-I)	,,	5 75
*227.	,, (இரண்டாம் புத்தகம்) (Book II)	,,	6 00

கணிதம் (Mathematics)

*228.	இயற் கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் (Book-I) (Algebra-Major)	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி	4 25
*229.	,, (Book II)	,,	3 25
*230.	தொகுமுறை வரை கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் (Pure Geometry-Major)	ஆர். மகாதேவன்	2 00
*231.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் (Numerical Mathematics—Major)	எம். எம். இராமசாமி	5 50
*232.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் (Trigonometry—Major)	வி. அரங்கநாதன்	3 25
*233.	கணிதம்—துணைப் பாடம் (Mathematics-Ancillary)	ஆர். அனுமந்தராவ்	6 00
*234.	நிலையியல்—சிறப்புப் பாடம் (Statics-Major)	கே. இராஜகோபாலன்	5 00
*235.	முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவ கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் (Analytical Geometry-3 Dimensions-Major)	கே. சிவசுப்பிரமணியன்	2 75
*236.	வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்—சிறப்புப் பாடம் (Vector Algebra-Major)	ஆர். மகாதேவன்	2 00
*237.	கணிதம்—துணைப் பாடம்—பகுதி-2 (Mathematics-II-Ancillary)	ஆர். அய்யாசாமி	5 75

* மூல நூல் (Original Book)

கணிதம்—(தொடர்ச்சி)

				ரூ.	பை.
*238.	வானியல்—முதல் புத்தகம்—சிறப்புப் பாடம் (Astronomy—Major Book-I)	...	திரு. தி. கோவிந்தராசன், திரு. கொ. முத்துசாமி	... 5	50
*239.	வானியல்—இரண்டாம் புத்தகம் (Astronomy-Book-II)	...	,,	... 3	75

புள்ளியியல் (Statistics)

*240.	புள்ளியியல்—துணைப் பாடம் (Statistics-Ancillary)	...	எஸ். கருப்பையா	... 3	50

விலங்கியல் (Zoology)

*241.	முதுகெலும்பற்றவை-1—சிறப்புப் பாடம் (Invertebarta-Major)	...	ஆர். முருகேசன்	... 11	50
*242.	,, 2 ,,	...	திருமதி. எஸ். கே. வள்ளி	... 11	25
*243.	முதுகு நாணுள்ளவை-1—சிறப்புப் பாடம் (Chordata Upto and including Reptilia (Major) (Book-I)	...	திருமதி. ராணி கந்தசாமி	... 8	00
*244.	,, ,, (Book-II)	...	,,	... 9	75
*245.	முதுகுத் தண்டுள்ளவை-2—சிறப்புப் பாடம் (Chordata-Major)	...	திருமதி. கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்	... 11	75
*246.	முதுகெலும்பிகளது கருவியல்—சிறப்புப் பாடம் (Vertebrate Embryology Major)	...	எஸ். ஆப்ரகாம்	... 9	00
*247.	முதுகெலும்பற்றவை—துணைப் பாடம் (Invertebrata-Ancillary)	...	என். இராமலிங்கம்	... 9	00
*248.	முதுகு நாணுள்ளவை—துணைப் பாடம் (Chordata-Ancillary)	...	வி. சேது	... 10	00
*249.	செல்லியல்—சிறப்புப் பாடம் (Cytology-Major)	...	என். இராமலிங்கம்	... 5	50

விலங்கியல் (தொடர்ச்சி)

*250.	மரபியல்—சிறப்புப் பாடம் (Genetics-Major)...	பெ. மா. அண்ணுமலே	... 5	25
*251.	சூழ்நிலேயியல்—உடற் செயலியல்-1 சிறப்புப் பாடம் (Ecology & Physiology-Major) (Book-I)...	டி. ஆர். கிருஷ்ணன்	... 4	75
*252.	சூழ்நிலேயியல்—உடற் செயலியல்-2 சிறப்புப் பாடம் (Ecology & Physiology-Major) (Book-II)...	,,	... 6	50
*253.	பரிணமம் (Evolution) ...	எஸ். ஆப்ரகாம்	... 6	25

தாவரவியல் (Botany)

*254.	தாவர வெளி உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப் பாட்டியலும்—சிறப்புப் பாடம் (Morphology, Taxanomy and Anatomy-Major) ...	கே. இராஜசேகரன்	... 11	00
*255.	தாவரப் புற அமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம் (Plant Morphology-Major) ...	கே. பாலச்சந்திர கணேசன்	... 9	25
*256.	தாவர உள்ளமைப் பியல்—சிறப்புப் பாடம் (Plant Anatomy-Major) ...	டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு	... 7	25
*257.	தாவரங்களின் வாழ்க்கை—சிறப்புப் பாடம் (Plant Physiology-Major) ...	எஸ். சுந்தரம்	... 9	50
*258.	தாவரவியல்—துணைப் பாடம் (Thallophytes, Bryophytes, Pteridophytes & Gymnospermae for Ancillary)..	பா. இராசாராம்	... 4	50
*259.	தாவரச் சூழ்நிலேயியல், மரபியல்—உயிர் மருஉயியல், இயங்கியல்—துணைப் பாடம் (Physiology, Ecology, Heredity & Evolution-Ancillary) ...	கே. பெரியசாமி	... 4	00

* மூல நூல் (Original Book)

தாவரவியல்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
*260.	சூழ்நிலையியல், பரிணாமம், மரபியல்— சிறப்புப் பாடம் (Ecology, Evolution & Genetics-Major)...	கே. ஆர். பாலசந்திர கணேசன்	... 8	25
*261.	டெரிடோஃபைட்டா, ஜிம்னோஸ்பெர்மே— சிறப்புப் பாடம் (Pteridophytes & Gymnosperms-Major)...	கே. இராஜசேகரன்	... 10	25
*262.	தாலோபைட்டா (பாசிகளும் பூஞ்சைகளும்) —சிறப்புப் பாடம் (Thallophyta—Algae & Fungi-Major) ...	டாக்டர் வே. சோ. சுந்தரலிங்கம்	... 9	00
*263.	தாவர வகைப்பாட்டியல்—சிறப்புப் பாடம் (Plant Taxonomy-Major) ...	ஆ. சம்பத்குமார்	... 10	50
*264.	பிரையோஃபைட்டா—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. இராஜசேகரன்	... 6	00

* மூல நூல் (Original Book)

